software per
la matematica

effedix 2012

Guida

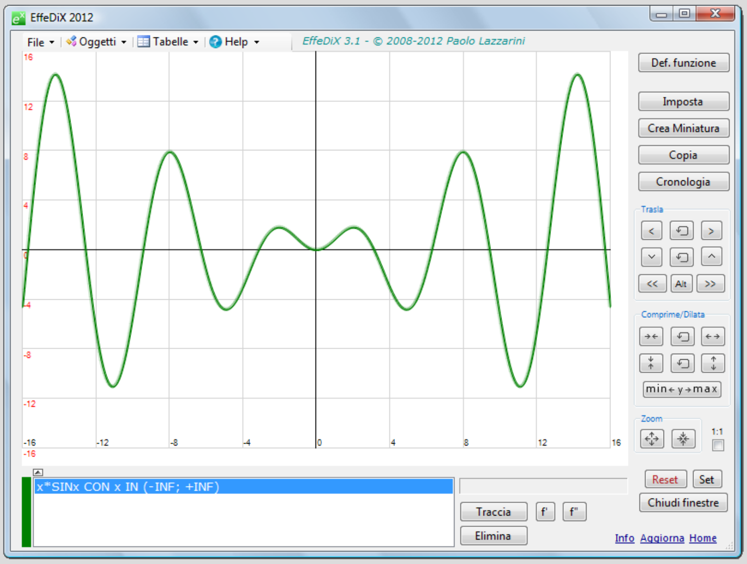
alla
versione
3.2

p.lazzarini@tin.it

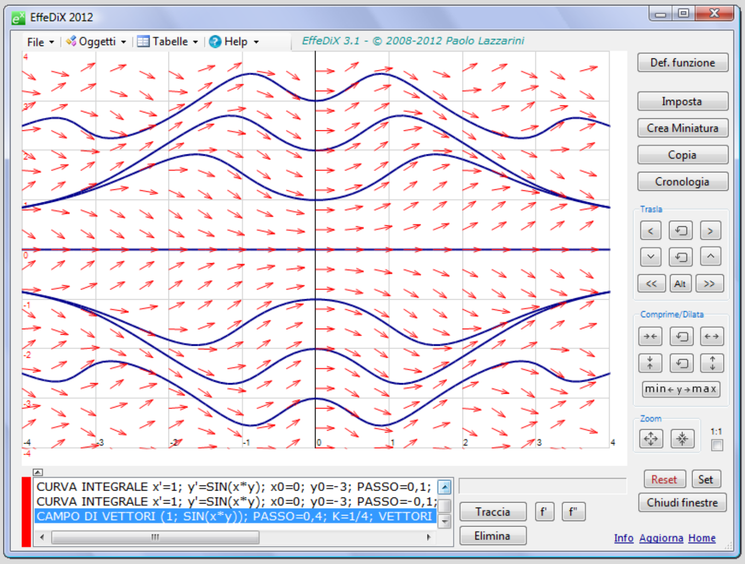
I n d i c e

Introduzione

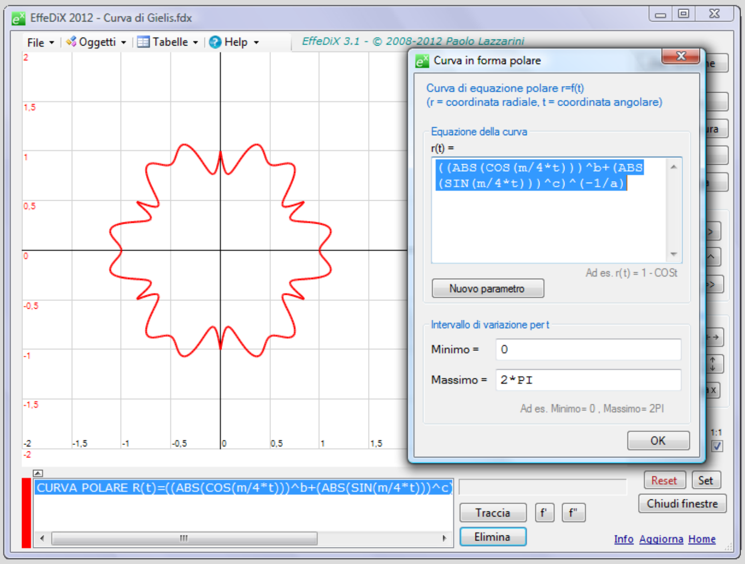
La versione 2012 di EffeDiX consente di tracciare un'ampia gamma di oggetti grafici: grafici di funzioni, grafici di successioni, grafici di funzioni definite a tratti, grafico della derivata prima e seconda, curve parametriche, curve polari, curve spline, grafici a dispersione, curve di regressione, campi vettoriali, curve integrali, plurirettangoli (relativi a somme di Riemann), orbite discrete 1D (diagrammi a ragnatela), orbite discrete 2D, diagrammi delle orbite (diagrammi di biforcazione). Sono inoltre presenti svariate opzioni per tracciare punti, intorni, segmenti, vettori, rette, poligoni, circonferenze, ellissi, parabole, iperboli, semipiani.



La qualità degli oggetti grafici è notevole essendo supportato l'antialiasing per tutti gli oggetti grafici e il rendering 3D per i grafici di funzione.

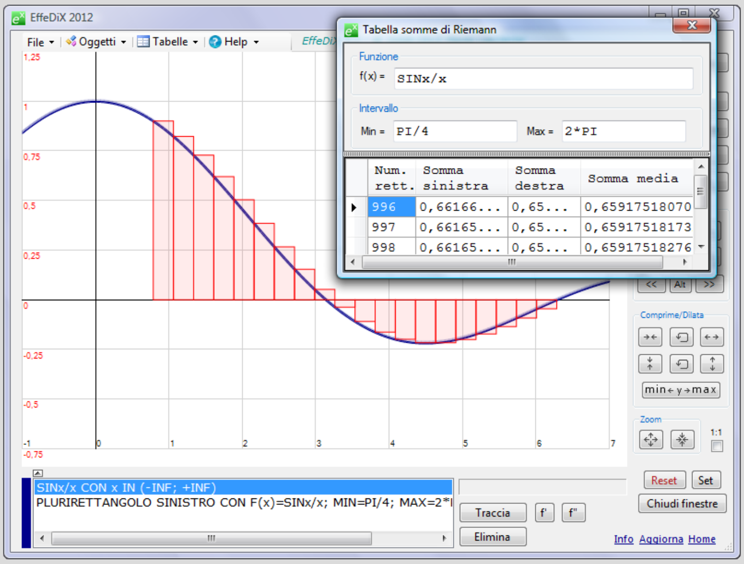


Il programma è stato progettato per essere utilizzato nel modo più semplice ed intuitivo e fornisce tutti gli strumenti di base per studiare un grafico; potrete operare traslazioni, compressioni, dilatazioni, zoomate utilizzando il mouse o facendo clic su dei pulsanti. Potrete inoltre generare facilmente e rapidamente svariati tipi di tabelle.

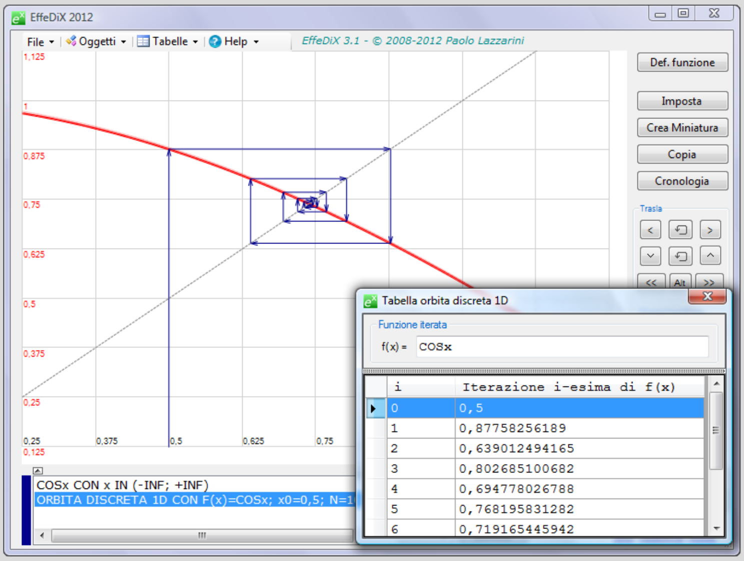


Una caratteristica del programma, che lo distingue da ambienti simili, consiste nella possibilità di animare lo scorrimento continuo del grafico di una funzione (o di una successione) verso destra o verso sinistra; in ogni frame dell'animazione il grafico viene tracciato, se possibile, tra il suo minimo e il suo massimo: in tal modo potrete osservare in modo continuo la sua evoluzione.

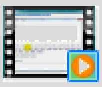
EffeDiX consente inoltre di studiare delle famiglie parametriche di funzioni utilizzando per ciascun parametro una slider bar; potrete anche animare un grafico facendo variare con continuità un parametro.



Tutti gli oggetti grafici di EffeDiX possono essere definiti utilizzando parametri; ad esempio potrete inserire il punto di coordinate (COSt, SINt) avendo dichiarato il parametro t che varia nell'intervallo [0, 2PI]. EffeDiX creerà una slider bar che vi consentirà di pilotare il punto facendo variare t oppure di animare il moto del punto facendo variare in modo automatico il parametro t.



Qui di seguito trovate una guida rapida a EffeDiX e anche una serie di esempi che vi consentiranno di capire in pochi minuti come sfruttare le potenzialità del programma. Sono inoltre disponibili alcuni video che mostrano concretamente, almeno negli aspetti essenziali, come utilizzare EffeDiX. Se avete una connessione veloce vi conviene iniziare da questi.



[Video introduttivi]

Non in linea, richiede connessione di rete

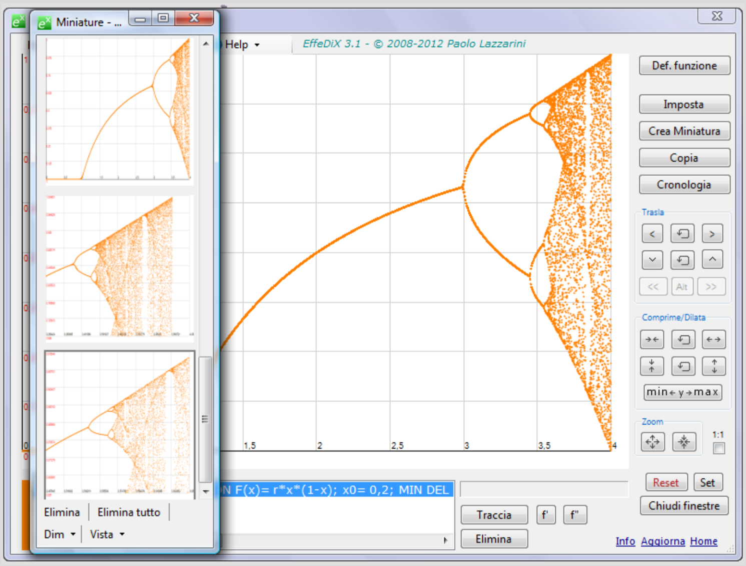
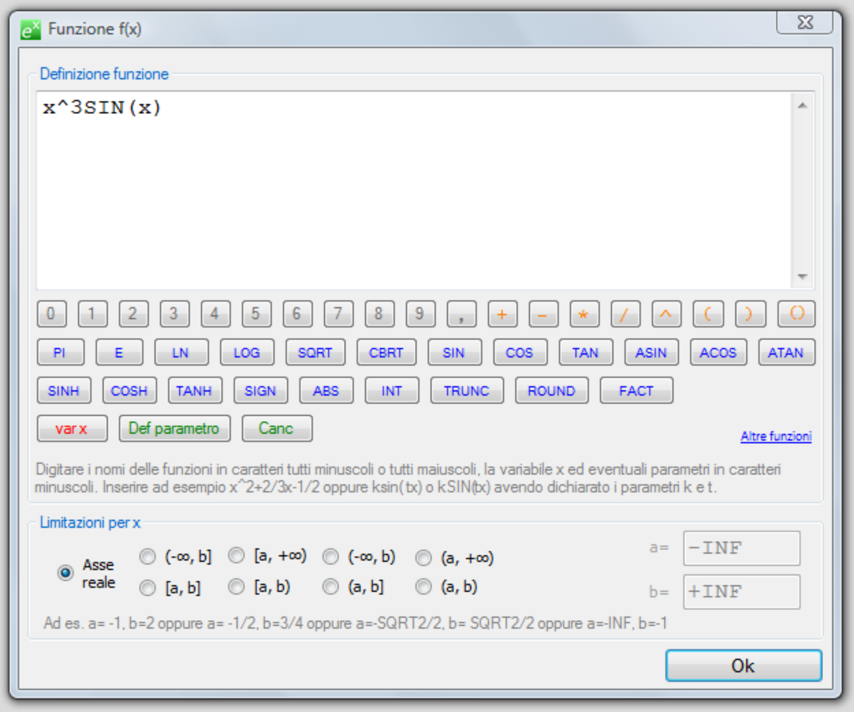


Grafico di una funzione

Facendo clic sul pulsante *Def. funzione* o, equivalentemente, selezionando l'opzione *Grafico di funzione y=f(x)* nel menu degli oggetti grafici, si apre la finestra per definire la funzione f(x) (figura a fianco).



I nomi delle funzioni devono essere digitati in caratteri **tutti minuscoli** o **tutti maiuscoli**
La variabile x e gli eventuali parametri devono essere digitati in caratteri **minuscoli**.

Ad esempio, le seguenti espressioni simboliche sono tutte corrette ed equivalenti

x^3sinx	x^3SINx
x^3sin(x)	x^3SIN(x)
x^3*sin(x)	x^3*SIN(x)
x^3 sin(x)	x^3 SIN(x)

Il segno di moltiplicazione è l'asterisco e, tutte le volte che è algebricamente possibile, può essere omesso. Potrete inserire le funzioni, naturalmente, utilizzando i pulsanti. Per elevare a potenza userete, come al solito, l'accento circonflesso; ad esempio x^3 si scrive x^3. Come separatore decimale userete la virgola (ma è accettato anche il punto che il parser converte in virgola). L'input può estendersi su più righe, in tal modo potrete inserire funzioni molto complesse. Gli spazi vengono ignorati. Fate attenzione alle parentesi; ad esempio l'espressione

$$\frac{x-1}{x^2-1}$$

va inserita, in notazione lineare, così

(x-1)/(x^2-1)

Il numero di Nepero deve sempre essere indicato con la lettera **maiuscola** E; la funzione esponenziale è quindi E^x. La costante pi greco deve essere indicata con PI oppure pi.

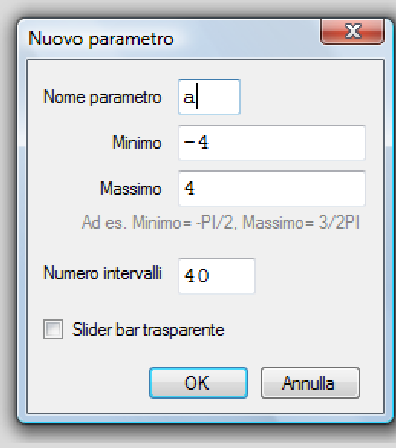
L'espressione che definisce una funzione può contenere, oltre alla variabile indipendente x, dei parametri (e delle costanti come PI, pi grego); ad esempio

a*SIN(n*PI*x)

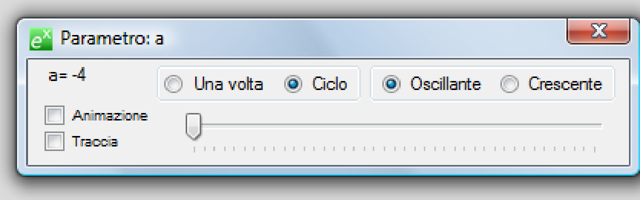
Qui i parametri utilizzati sono *a* ed *n* e devono essere dichiarati facendo clic sul pulsante *Def. parametro* che apre una apposita finestra (vedi figura seguente).

Nella figura a fianco, ad esempio, è stato dichiarato il parametro *a*, con la possibilità di variare tra -4 e 4; il passo con cui varia il parametro è in questo caso 0,2 perché sono stati impostati 40 intervalli; il passo infatti è dato da

passo = (Massimo - Minimo)/Numero intervalli =
= 8/40 = 0,2



Una volta dichiarato, un parametro può essere utilizzato liberamente nella scrittura di espressioni e verrà gestito mediante una **slider bar** (figura a fianco), creata contestualmente alla dichiarazione.



Dopo aver dichiarato un parametro, per modificarne l'escursione o per cambiare il numero di intervalli fare clic col pulsante destro sulla slider bar.

Tenete presente che il preprocessore e il parser algebrico forniscono un messaggio d'errore in tutte le situazioni che non riescono ad interpretare; ad esempio se digitate

((x+1)^2

il preprocessore segnalerà che le parentesi non sono bilanciate e se digitate

(x+1)^2()

il parser segnalerà un errore di sintassi. In alcuni casi il parser potrebbe non essere in grado di interpretare delle espressioni "ambigue"; ad esempio se digitate

2^x^2

sarà segnalato un errore di sintassi. In questi casi basta aggiungere delle parentesi; ad esempio digitando

2^(x^2)

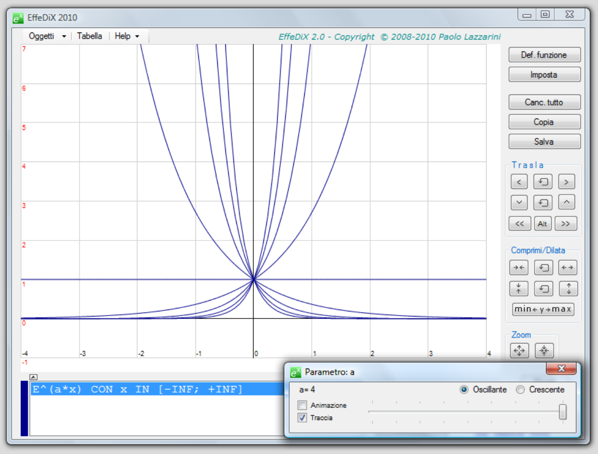
oppure digitando, se è questo che volete,

(2^x)^2

Per inserire la potenza di una funzione, ad esempio il quadrato di sinx, digitate sin(x)^2.

Una volta inserita una funzione, la vedrete indicata nel **box degli oggetti grafici** che si trova sotto il piano cartesiano e potrete tracciarne il grafico utilizzando il pulsante *Traccia* oppure, più rapidamente, facendo doppio clic sulla riga del box relativa alla funzione.

Esempio Animare il grafico della funzione e^{ax} facendo variare il parametro *a*.



Digitate la funzione così: E^(ax)
Dichiarate il parametro *a* facendolo variare, ad esempio, tra -4 e 4 con 100 intervalli.
Tracciate il grafico (pulsante *Traccia* o, più rapidamente, doppio clic sulla relativa riga del box degli oggetti grafici).
Agendo sulla slider bar potrete vedere come varia il grafico al variare del parametro *a* e potrete anche animare il grafico facendo clic sulla casella *Animazione* presente nella slider bar.

Torniamo alla finestra di definizione di una funzione; nel box *Limitazioni per x* trovate dei pulsanti circolari a scelta esclusiva e dei campi che vi consentono di impostare le eventuali limitazioni per la variabile x. Come impostazione predefinita la x è libera di variare su tutto l'asse reale. Fate attenzione: EffeDiX traccerà la funzione tenendo conto delle limitazioni impostate e **del dominio naturale in cui la funzione è definita**. Se ad esempio la funzione definita è LNx, EffeDiX traccerà ovviamente la funzione per x>0, cioè per i valori di x per i quali il logaritmo assume valori reali, indipendentemente dal fatto che non sia impostata alcuna limitazione per x (cioè che x possa variare su tutto l'asse reale). Se invece impostate, ad esempio, le limitazioni $2 \leq x < +\infty$, EffeDiX traccerà la funzione logaritmo in questo intervallo (illimitato a destra).

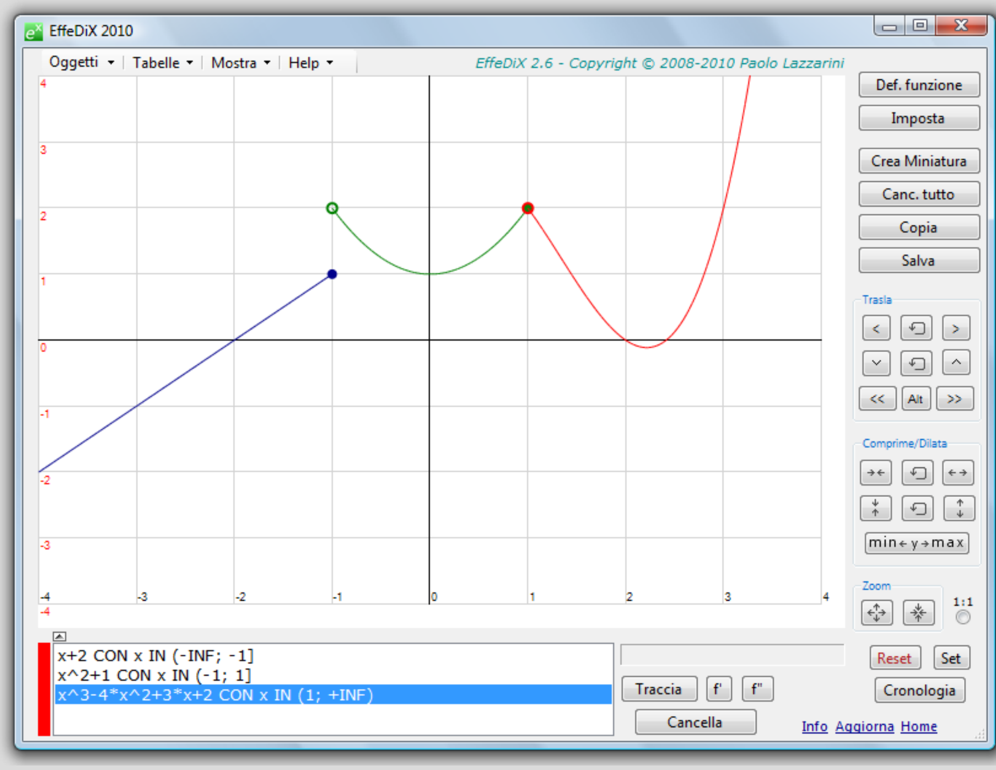
Esempio Tracciare la funzione definita a tratti

$$f(x)=\begin{cases} \mathbf{x+2} \\ \text{per } x \leq -1 \\ \mathbf{x^2+1} \\ \text{per } -1<x\leq 1 \\ \mathbf{x^3-4x^2+3x+2} \\ \text{per } x>1 \end{cases}$$

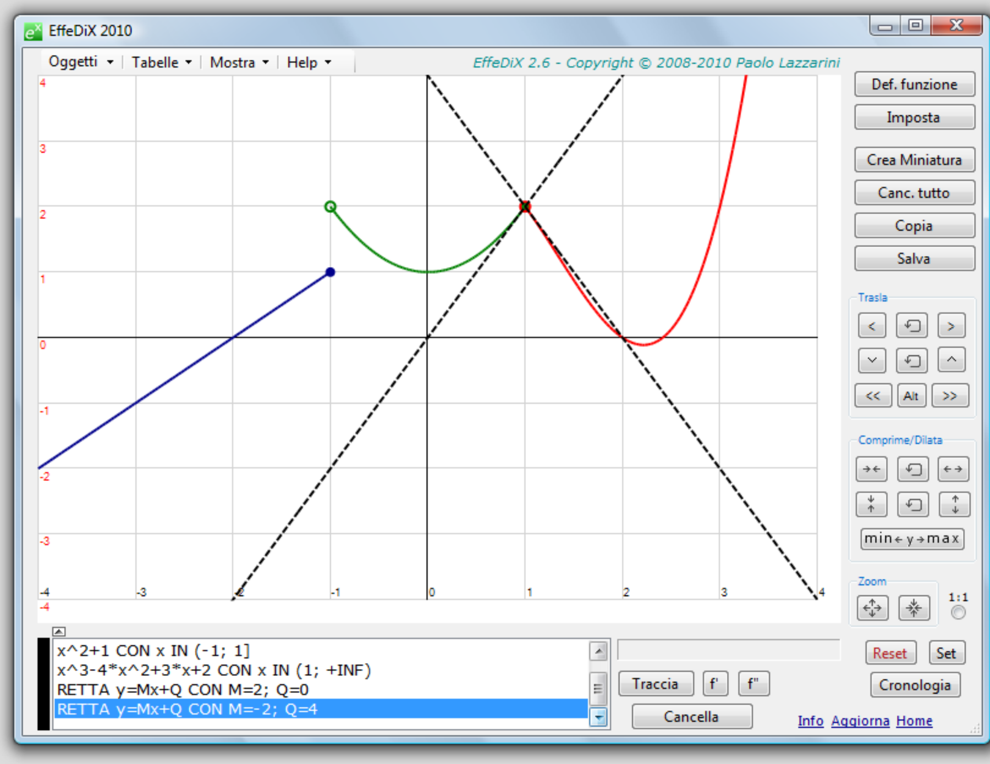
Si procede così: tracciamo tre funzioni ciascuna definita nel suo intervallo. Le impostazioni, per ciascuna delle tre funzioni, sono:

- $x+2$, intervallo da selezionare $(-\infty, b]$ con $b=-1$
- x^2+1, intervallo da selezionare $(a, b]$ con $a=-1$ e $b=1$
- x^3-4x^2+3x+2, intervallo da selezionare $(a, +\infty)$ con $a=1$

(vedi la figura seguente in cui i tre tratti sono rappresentati con tre colori diversi).



La funzione è evidentemente **discontinua** (ha un salto) in x=-1 mentre invece è continua in x=1. Notate che EffeDiX rappresenta con un punto "pieno" o "vuoto" gli estremi del tratto di curva che rispettivamente appartengono o non appartengono al tratto. Si osservi infine che nel punto (1, 2) la funzione è continua ma non derivabile; per mettere in luce questo aspetto si possono tracciare le due **diverse** tangenti alla curva in tal punto: la tangente ottenuta per $x \to 1$ da sinistra e per $x \to 1$ da destra (rispettivamente di equazioni y=2x e y=-2x+4). Si può anche rendere dinamico questo discorso parametrizzando le due tangenti (2 parametri distinti) e pilotandole con due slider bar.



Dopo aver tracciato un grafico, per poterlo esplorare, potremo operare sul piano.

Per **traslare** il piano utilizzare il mouse (trascinarlo tenendo premuto il pulsante sinistro) oppure utilizzare gli appositi pulsanti.

Per operare **compressioni** e **dilatazioni** utilizzare gli appositi pulsanti.

Per **zoomare** (senza modificare i rapporti) utilizzare gli appositi pulsanti.

Per **zoomare localmente** utilizzare il mouse (selezionare la regione da ingrandire trascinando il mouse tenendo premuto il pulsante destro e poi rilasciare il pulsante).

Per **resettare traslazioni, compressioni, dilatazioni** utilizzare il relativo pulsante di annullamento operazione (icona: freccia che ruota in senso antiorario).

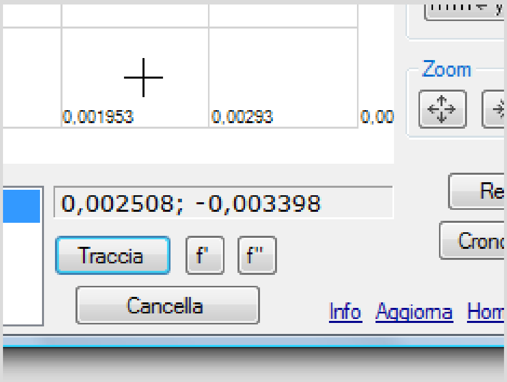
Per **resettare tutte le operazioni** effettuate utilizzare il pulsante *Reset*. Si ritorna alla regione di piano precedentemente impostata mediante la finestra *Impostazioni – Piano* oppure mediante il pulsante *Set*.

Per **impostare l'attuale regione** di piano visualizzata come regione di default utilizzare il pulsante *Set*. Il pulsante *Reset* ci riporterà a tale regione.

Per **impaginare il grafico tra il massimo e il minimo** relativamente all'intervallo sull'asse delle x impostato, utilizzare il pulsante *min←y→max*. Questo pulsante comprime o dilata automaticamente il piano in modo tale da "impaginare" il grafico della funzione f(x) **attualmente selezionata** nel box degli oggetti grafici tra il minimo e il massimo assoluto nell'intervallo sull'asse delle x impostato (tale operazione viene effettuata ovviamente se possibile, cioè se il minimo e il massimo esistono finiti). La determinazione del massimo e minimo è tanto più accurata quanto maggiore è il numero *n* di punti effettivamente tabulati (vedi *Impostazioni – Prossimo oggetto – Algoritmo*).

Per lo **scorrimento continuo** del piano utilizzare gli appositi pulsanti (icone: "≪" e "≫"). Vedi scorrimento e relativo esempio.

Tenete presente che il **campo delle coordinate** (in basso a destra sotto il piano cartesiano) fornisce le coordinate del cursore con una precisione che aumenta tanto più è stata ingrandita la regione.

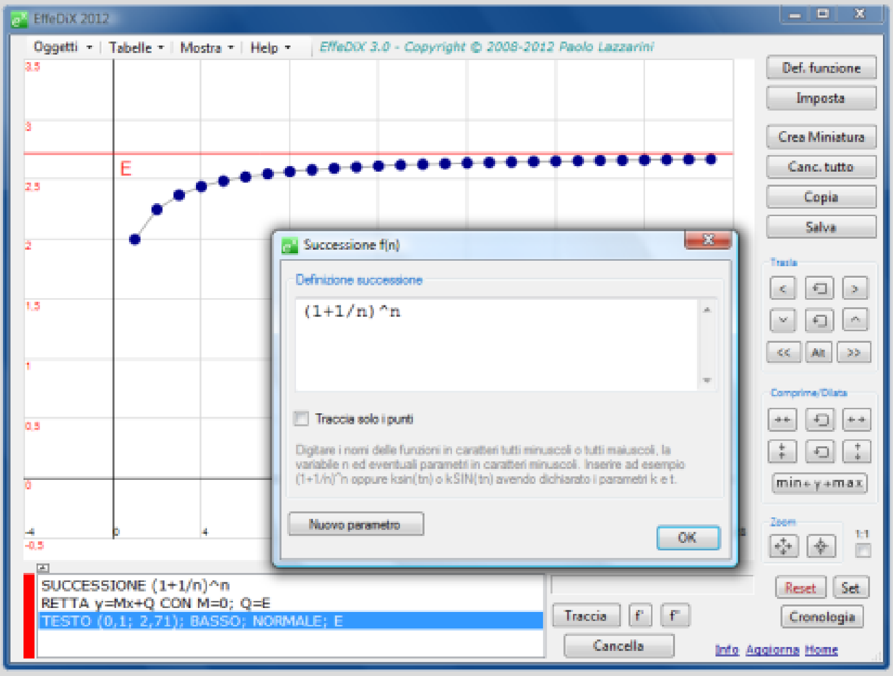


Tasti rapidi

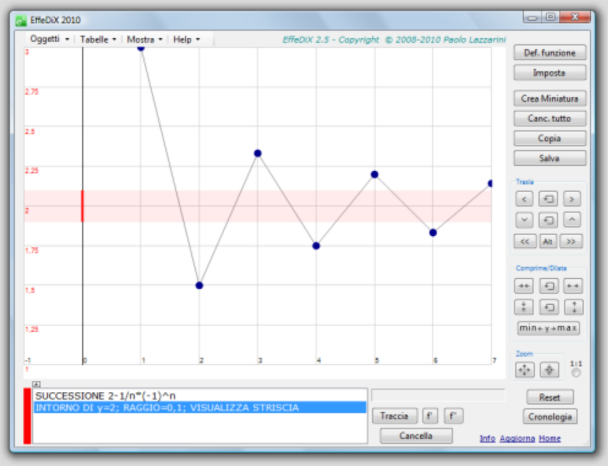
s, **d**, **a**, **b**:	traslazioni del piano (sinistra, destra, alto, basso)
i, r:	zoom rapido senza gradualità (ingrandimento, riduzione)
1, **2**:	dilatazioni e compressioni rapide (senza gradualità) in direzione orizzontale
3, **4**:	dilatazioni e compressioni rapide (senza gradualità) in direzione verticale

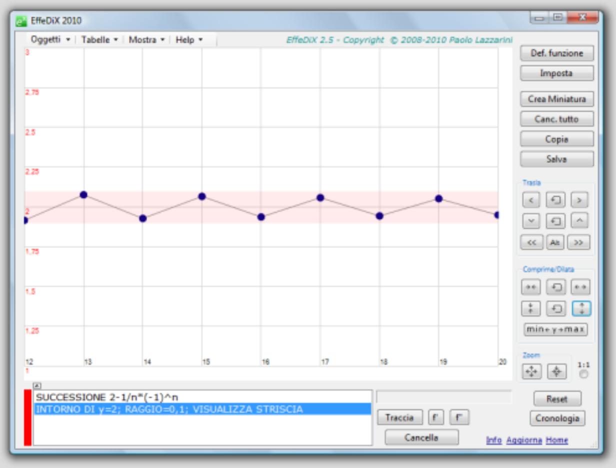
Grafico di una successione

Facendo clic sull'opzione *Grafico di successione y=f(n)* del menu degli oggetti grafici, si apre la finestra per definire una successione f(n). La variabile indipendente è necessariamente n; potrete naturalmente utilizzare dei parametri (dichiarandoli). Per l'immissione di f(n) terrete presente quanto detto a proposito delle funzioni f(x). Nella figura a fianco vedete il grafico della successione (1+1/n)^n; è stata anche tracciata la retta y=E (con la lettera E maiuscola EffeDiX indica il numero di Nepero).



Esempio Nelle figura seguente (a sinistra) vedete i primi punti del grafico della successione 2+(-1)^n/n; inoltre è stato evidenziato l'intorno di raggio 1/10 del punto y=2 sull'asse delle y (oggetto grafico *Intorno*). Il limite della successione per n→∞ è evidentemente 2. Potete verificare, traslando il grafico o operando uno scorrimento, che a partire ad esempio da n=12 i valori f(n) della successione cadono in tale intorno (vedi figura a destra).





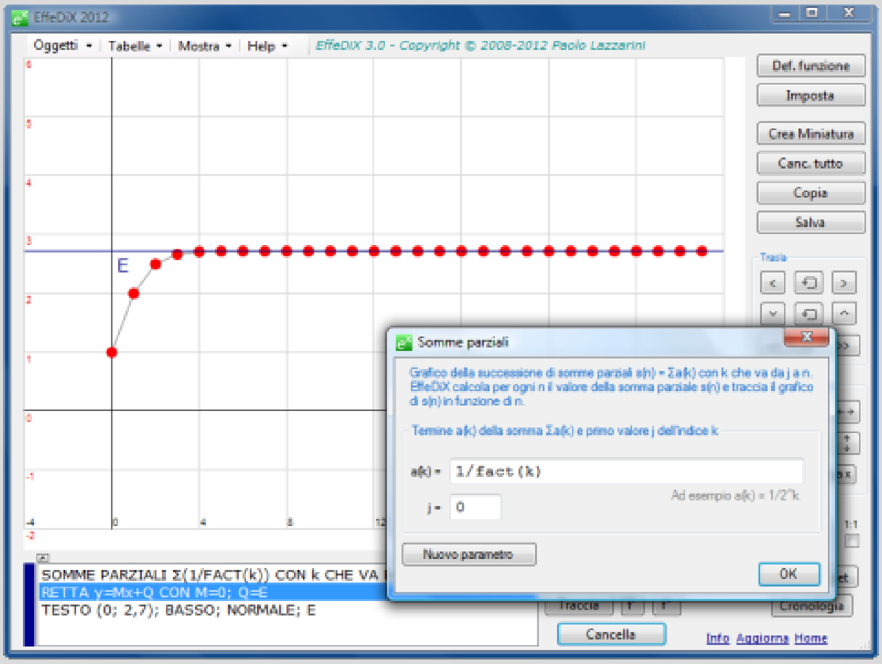
Qui trovate un video [980 Kb, richiede connessione] in cui vedete le cose in termini dinamici (l'intorno, in questo caso, ha raggio 1/50).

Grafico di una successione di somme parziali

Facendo clic sull'opzione *Grafico somme parziali* del menu degli oggetti grafici, si apre la finestra per definire il termine a(k) della somma

$$s(n) = \sum_{k=j}^{n} a(k)$$

La variabile indipendente è necessariamente k; il valore iniziale di k è j. Potrete naturalmente utilizzare dei parametri (dichiarandoli). Per l'immissione di a(k) terrete presente quanto detto a proposito delle funzioni f(x).



EffeDiX traccia il grafico della successione s(n) in funzione di n.

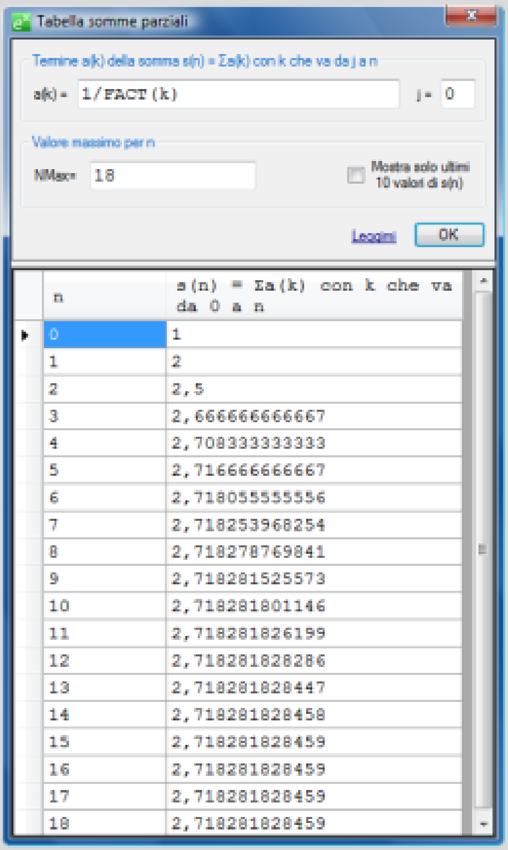
Nella figura a fianco, a titolo di esempio, vedete il grafico della successione

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

E' stata anche tracciata la retta y=E (con la lettera E maiuscola EffeDiX indica il numero di Nepero).

Sia il grafico sia la tabella qui a fianco, generata mediante l'opzione *Tabelle – Tabella somme parziali*, mostrano la rapida convergenza di s(n) al valore *e*. La tabella mostra che a partire dal 15-esimo termine si ottiene un valore con 12 cifre decimali stabili che fornisce un'ottima approssimazione di

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$$

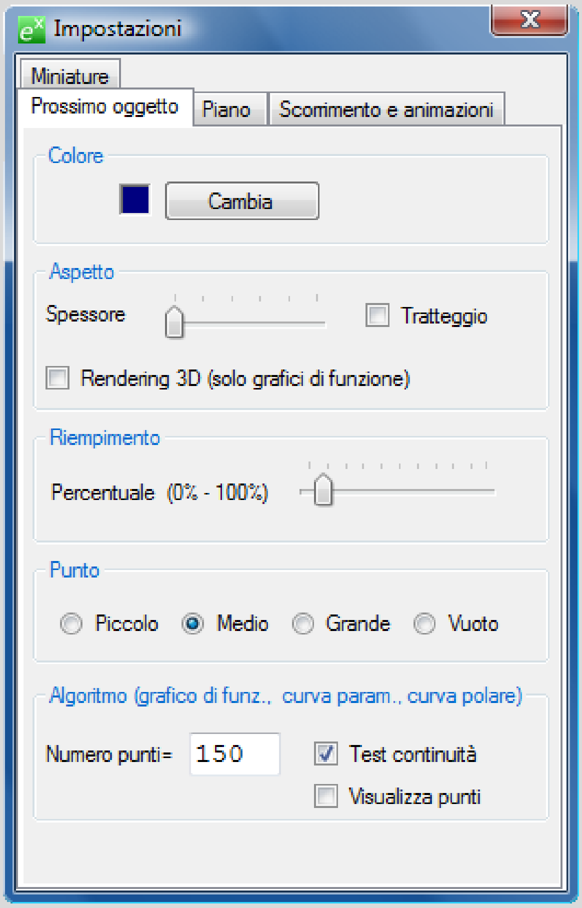


Impostazioni

Facendo clic sul pulsante *Imposta* si apre la finestra a schede per gestire le varie impostazioni.

Prima scheda: *Prossimo oggetto*

La prima scheda, relativa alla linguetta *Prossimo oggetto* (vedi figura a fianco), consente di gestire tutte le impostazioni che riguardano il **prossimo oggetto** che sarà tracciato.



> Se volete modificare le impostazioni per un oggetto già tracciato, selezionatelo nel box degli oggetti grafici, fornite le nuove impostazioni e ritracciatelo (facendo doppio clic sull'oggetto).

Le impostazioni:

Colore Potrete impostare il colore del prossimo oggetto grafico che sarà tracciato.

Tenete presente che il colore può essere cambiato più rapidamente utilizzando il menu contestuale che si apre facendo clic col pulsante destro del mouse sul box degli oggetti grafici.

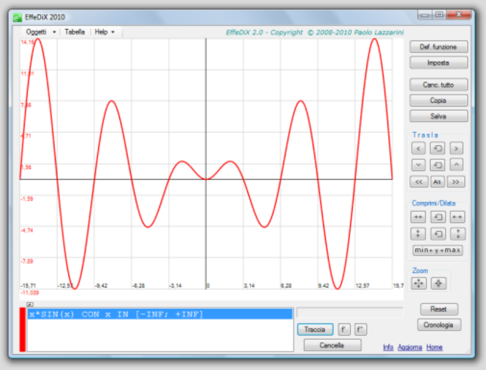
Aspetto Avete una slider bar per impostare lo spessore delle linee dell'oggetto che sarà tracciato. Potete anche impostare il tratteggio o il rendering 3D. Il rendering 3D viene applicato solo ai grafici di funzione.

Riempimento Avete una slider bar per impostare il riempimento degli oggetti grafici chiusi: circonferenze, ellissi, poligoni. Se non volete riempimento impostate il valore 0.

Punto Vi consente di impostare le dimensioni del prossimo punto che sarà tracciato o di impostare un punto "vuoto".

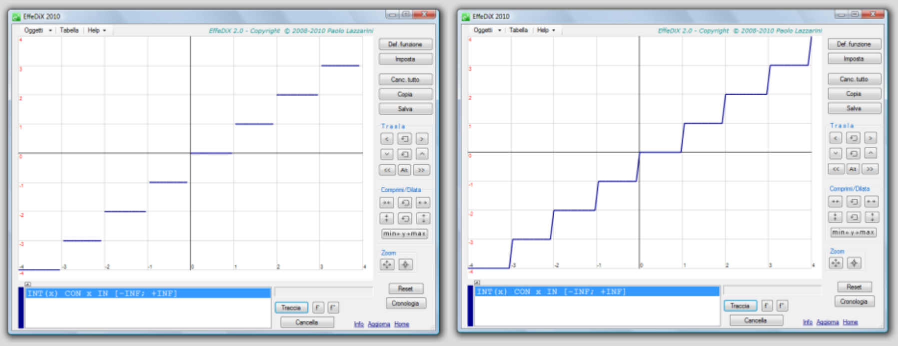
Algoritmo Qui trovate le impostazioni che concernono l'algoritmo di tracciamento dei grafici di funzione, delle curve parametriche e delle curve polari.

(a) Numero punti



E' il numero *n* dei punti che saranno effettivamente tabulati da EffeDiX per tracciare il grafico di una funzione o di una curva parametrica, relativamente all'intervallo impostato (per l'esattezza sono tabulati *n+1* punti). Il numero di punti predefinito è *n*=200. Ogni coppia di punti consecutivi viene collegata con un segmento, quindi si ha in realtà un'approssimazione del grafico. In alcuni casi sarà necessario impostare un numero di punti più alto; ad esempio se si vuole un grafico accurato della funzione xSIN(x) nell'intervallo [-5PI, 5PI] in cui la funzione compie varie oscillazioni, sarà opportuno impostare almeno n=300.

(b) Test continuità

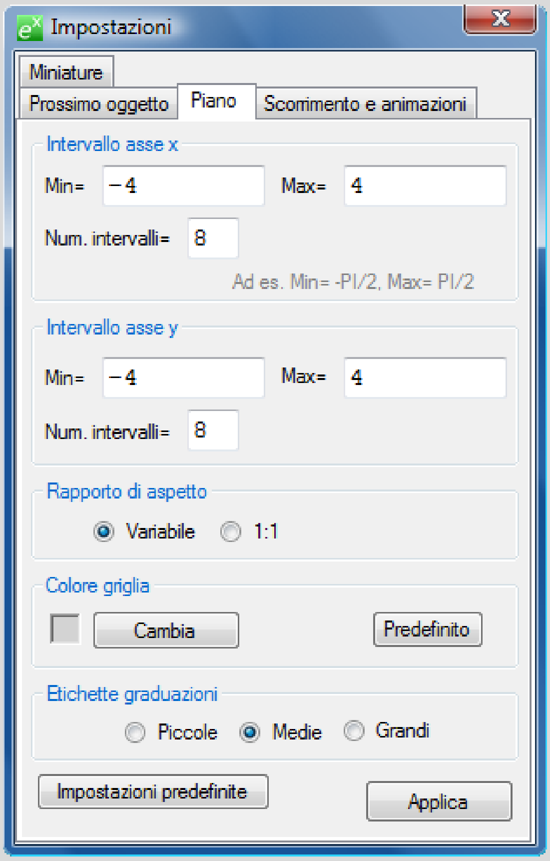


Potete attivare o disattivare il test di continuità per il tracciamento del grafico di una funzione, di una curva parametrica o di una curva polare. Nelle figure a fianco vedete la funzione INT(x), la parte intera di x, tracciata con il test attivato (a sinistra) e disattivato (a destra); nel primo caso i punti di discontinuità sono gestiti correttamente ma non nel secondo. Tenete presente tuttavia che il test di continuità rallenta il tracciamento del grafico, quindi se la funzione è continua su tutto l'asse reale è meglio disattivarlo. L'impostazione predefinita per il grafico di una funzione è "test attivo" mentre per il grafico di una curva, parametrica o polare, è "non attivo".

(c) Visualizza punti

Rende visibili (o meno) i punti che sono effettivamente tabulati da EffeDiX per tracciare il grafico di una funzione o di una curva parametrica.

Seconda scheda: *Piano*



La seconda scheda, relativa alla linguetta *Piano* (vedi figura a fianco), consente di gestire tutte le impostazioni che riguardano la regione di piano cartesiano attualmente visualizzata. Per rendere effettive le nuove impostazioni dovete fare clic sul pulsante *Applica*.

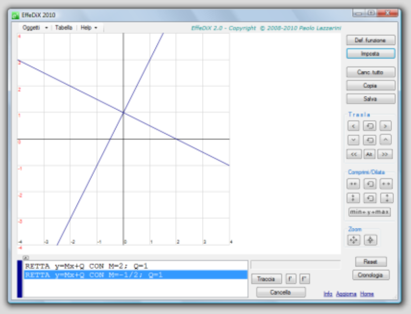
La regione di piano visualizzata è definita da un intervallo sull'asse delle x e da un intervallo sull'asse delle y; potrete impostare entrambi fornendo gli estremi (campi **Min** e **Max**). Tenete presente che i campi consentono l'input simbolico: potrete ad esempio impostare l'intervallo da –PI/2 a 3PI/2 oppure da –SQRT2 a SQRT2/2.

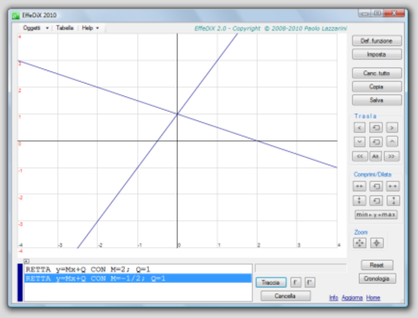
La distanza tra due successive graduazioni su ciascun asse è determinata, oltre che dai valori Min e Max, dal valore impostato nel campo **Num. intervalli** (numero di intervalli sull'asse) e precisamente è data da

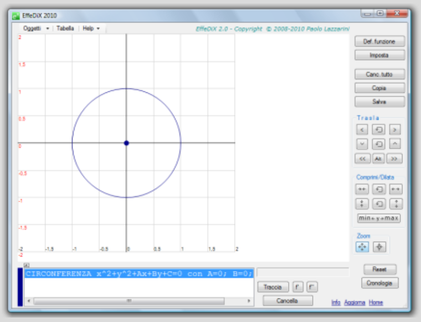
(Max - Min)/Num. intervalli

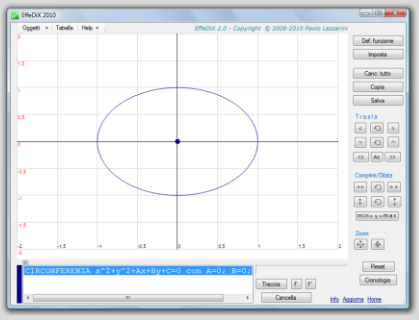
Se ad esempio impostate Min=-4, Max=4 e Num. intervalli=8 allora la distanza tra due graduazioni è uguale 8/8=1, se impostate Min=0, Max=5 e Num. intervalli=20 allora la distanza tra due graduazioni è uguale 5/20=0,25.

Potete inoltre modificare il **rapporto di aspetto** tra gli assi del piano cartesiano che per default è variabile cioè varia col ridimensionamento della finestra. Se impostate un rapporto di aspetto uguale a 1, i due assi avranno la stessa lunghezza e quindi, impostando la stessa scala sui due assi, avrete un sistema di riferimento perfettamente **monometrico**. La scelta di un sistema monometrico non è in genere conveniente ma potrebbe esserlo in alcuni casi, ad esempio se volete tracciare delle circonferenze o valutare, a vista, degli angoli; nelle figure a fianco vedete i grafici delle due rette perpendicolari di equazione rispettivamente y=2x+1 e y=-1/2x+2 (nella figura a sinistra il sistema è monometrico, a destra dimetrico).









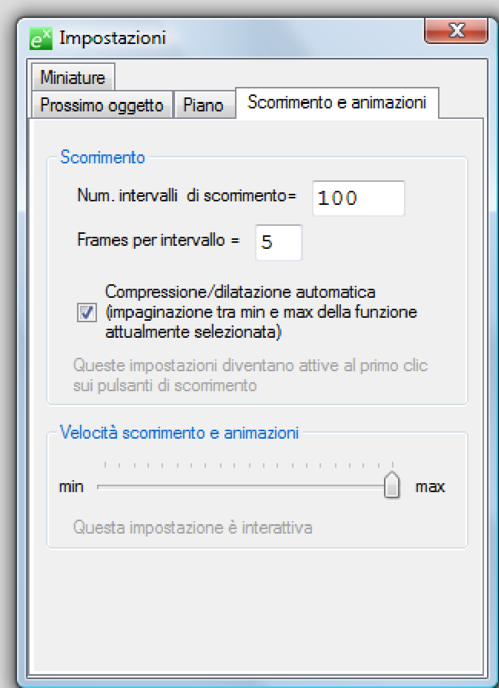
Qui a fianco vedete la stessa circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$ in un sistema monometrico e in un sistema dimetrico (in cui appare come un'ellisse).

Potete cambiare il colore della **griglia** sul piano cartesiano (box *Colore griglia,* pulsante *Cambia*); il colore predefinito è un grigio leggero (RGB = 211, 211, 211).

Potete infine visualizzare le etichette relative alla graduazioni in caratteri più o meno grandi.

Terza scheda: *Scorrimento e animazioni*

La terza scheda, relativa alla linguetta *Scorrimento* e *animazioni* (vedi figura a fianco), consente di gestire le impostazioni che riguardano l'animazione dello scorrimento continuo del piano, con tutti gli oggetti grafici tracciati, in direzione orizzontale (verso sinistra o verso destra).
Il numero totale di intervalli di scorrimento è dato dal valore inserito nel campo *Num. intervalli di scorrimento*; l'ampiezza di un intervallo è data dalla distanza tra due graduazioni successive e quindi varia in dipendenza dalle impostazioni della scheda precedente.

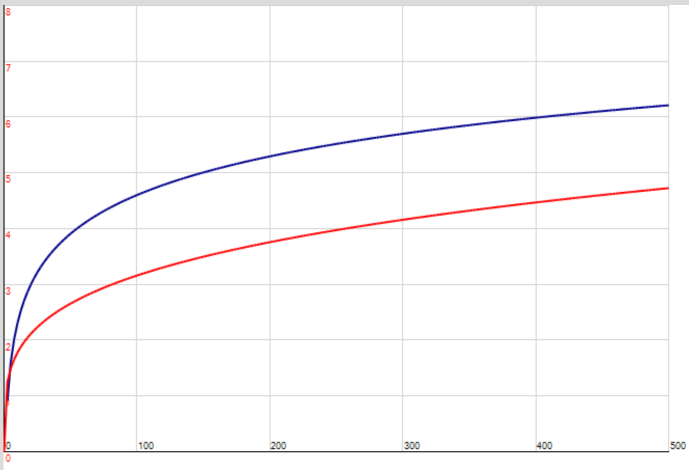


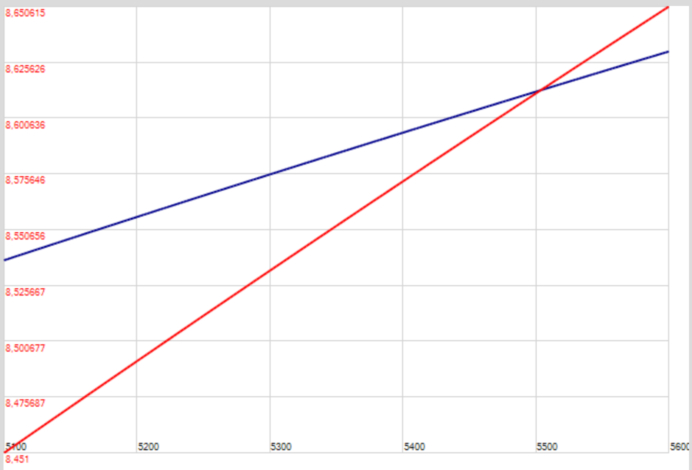
Il numero di frames dell'animazione generati in ogni intervallo è dato dal valore inserito nel campo *Frames per intervallo*; più alto è questo valore più lento e graduale sarà lo scorrimento continuo dei grafici.

Tenete presente inoltre che se la casella *Compressione/dilatazione automatica* è spuntata e nel box degli oggetti grafici **è selezionata una funzione o una successione**, il grafico della funzione sarà tracciato, se possibile, tra il suo minimo e il suo massimo, ricalcolati per ogni frame (quindi il piano sarà opportunamente compresso o dilatato); in tal modo potrete apprezzare in modo significativo l'evoluzione di un grafico anche quando una rappresentazione statica non lo consentirebbe che in modo approssimativo (considerate ad esempio il grafico della funzione $y = e^x \sin x$).

Nel caso in cui nel box degli oggetti grafici fossero presenti più funzioni **dovete selezionare la funzione che volete sia assunta come funzione di riferimento** (vedi esempio seguente).

Esempio Tracciate i grafici delle due funzioni $y=\ln x$ e $y=x^{1/4}$. Impostate il piano con x tra 0 e 500 e y tra 0 ed 8. Questa è la situazione di partenza per la nostra esplorazione (vedi figura a fianco). Il grafico di $x^{1/4}$ (in rosso) dopo una prima breve fase, appena percettibile in figura, in cui è al di sopra del grafico di lnx (in blu), sembra collocarsi definitivamente al di sotto di quest'ultimo. Ora selezionate nel box degli oggetti grafici la funzione $x^{1/4}$ e fate clic sul pulsante di scorrimento con le frecce che puntano a destra. Potrete seguire l'evoluzione del grafico rosso al crescere di x (ben presto vedrete scomparire, in alto, il grafico blu che in questa fase cresce più rapidamente). Ma dopo un po', cosa succede? Vedrete che il grafico rosso, intorno a x=5500, interseca il grafico blu (vedi figura a fianco), lo "supera" dal basso verso l'alto, per così dire, e poco dopo il grafico blu scompare verso il basso (definitivamente). Ogni funzione potenza, prima o poi, cresce più rapidamente della funzione logaritmo. Fate anche l'altro possibile esperimento cioè selezionate la funzione logaritmo e operate di nuovo lo scorrimento. Questa volta potrete osservare l'andamento del grafico blu … **cambia** il "punto di vista".





Poiché la compressione/dilatazione automatica durante lo scorrimento è attiva solo quando è selezionata una funzione o una successione, per poter seguire l'evoluzione di altri oggetti grafici (ad es. un'iperbole o un campo vettoriale) selezionate una funzione "guida" del tipo y=mx (o di altro tipo) e poi esplorate l'oggetto in questa direzione.

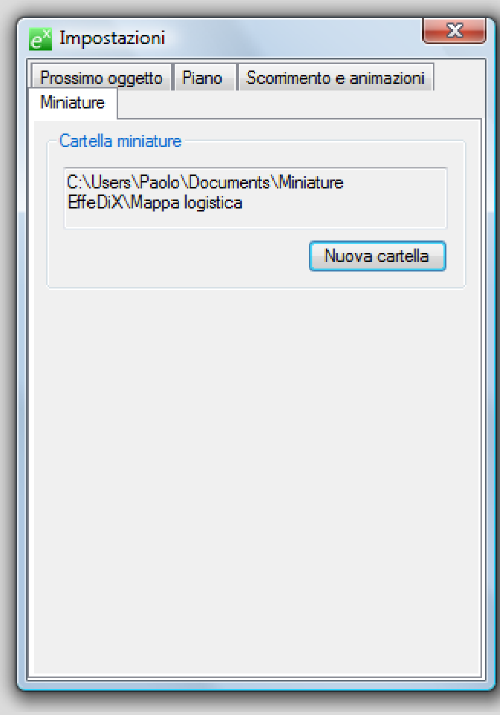
Nella terza scheda trovate anche una slider bar che controlla sia la velocità dello scorrimento (senza modificare il numero di frames) sia la velocità di qualsiasi altra animazione. L'impostazione predefinita è: massima velocità.

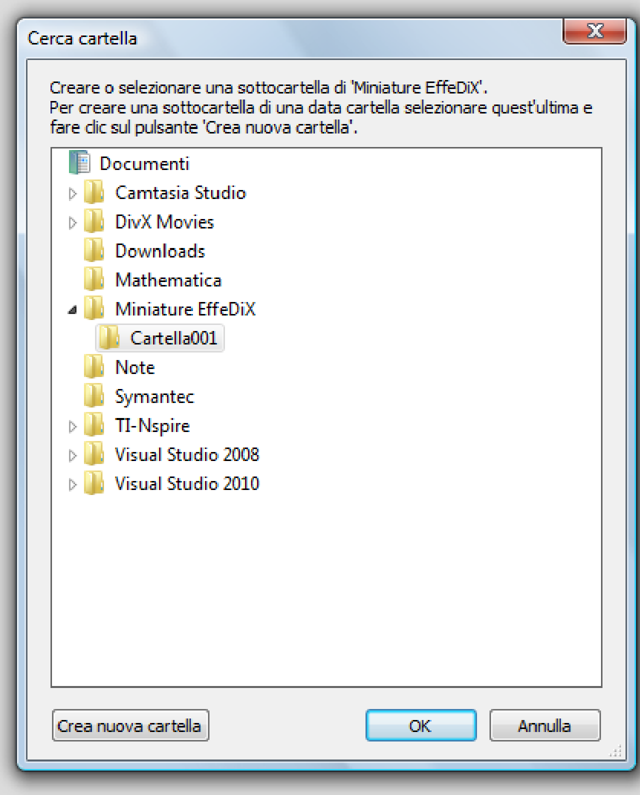
Quarta scheda: *Miniature*

La quarta scheda, relativa alla linguetta *Miniature* (vedi la prima delle figure seguenti), consente di gestire le cartelle destinate a contenere le miniature (potrete selezionare, creare, eliminare, rinominare cartelle).

Tenete presente che EffeDiX crea automaticamente la cartella "Miniature EffeDiX" come sottocartella della cartella "Documenti" e che le cartelle delle miniature devono **necessariamente** essere sottocartelle di "Miniature EffeDiX".

Nella seconda delle figure seguenti vedete ad esempio la cartella di miniature "Cartella001" (cartella predefinita). Per eliminare o rinominare una cartella utilizzate il pulsante destro del mouse.



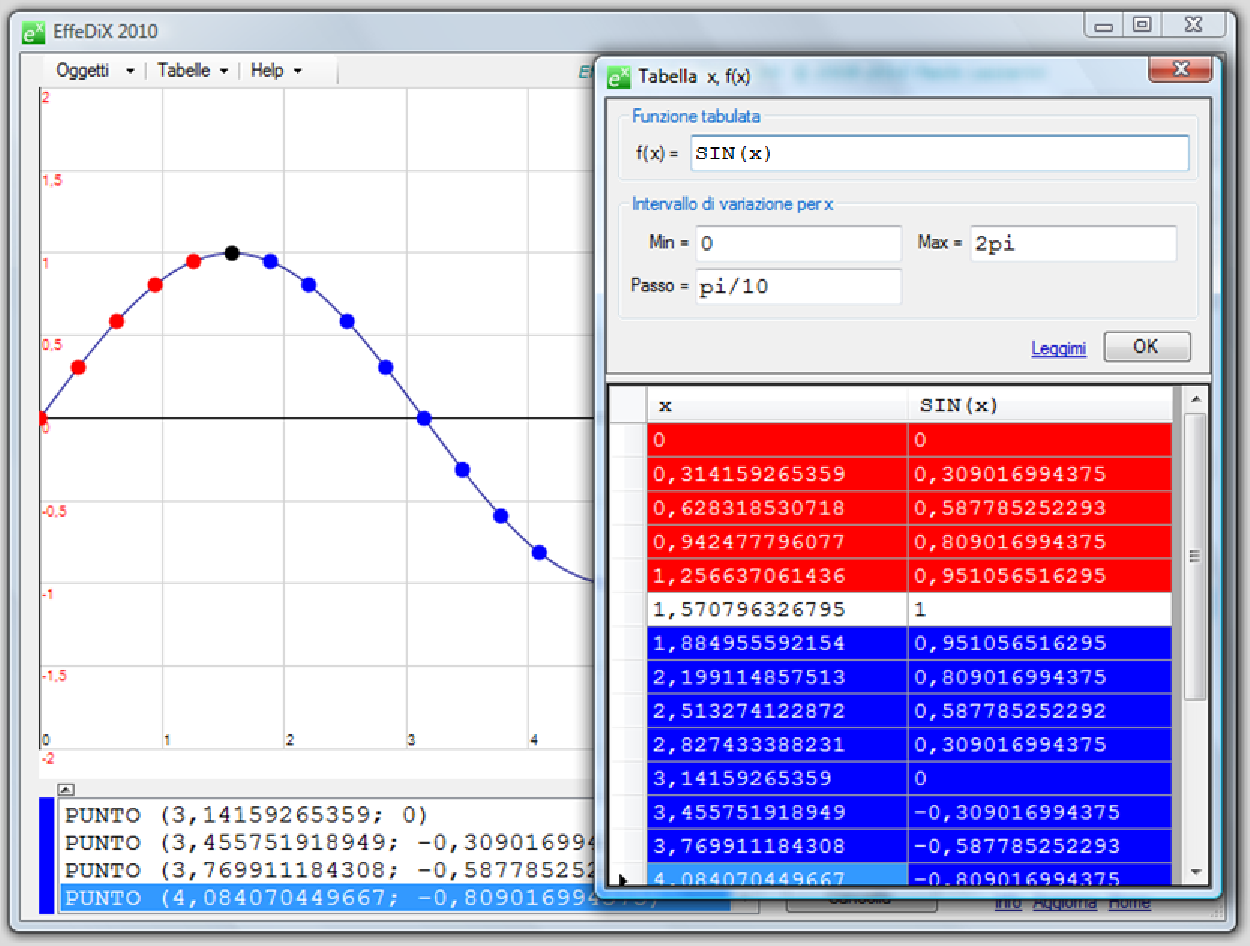


Tabelle

Facendo clic sul menu *Tabelle* potrete creare vari tipi di tabelle.

Tabella x, f(x)

Nella figura seguente vedete la tabella relativa alla funzione *SIN(x)*, tabulata nell’intervallo da 0 a 2pi con passo pi/10.

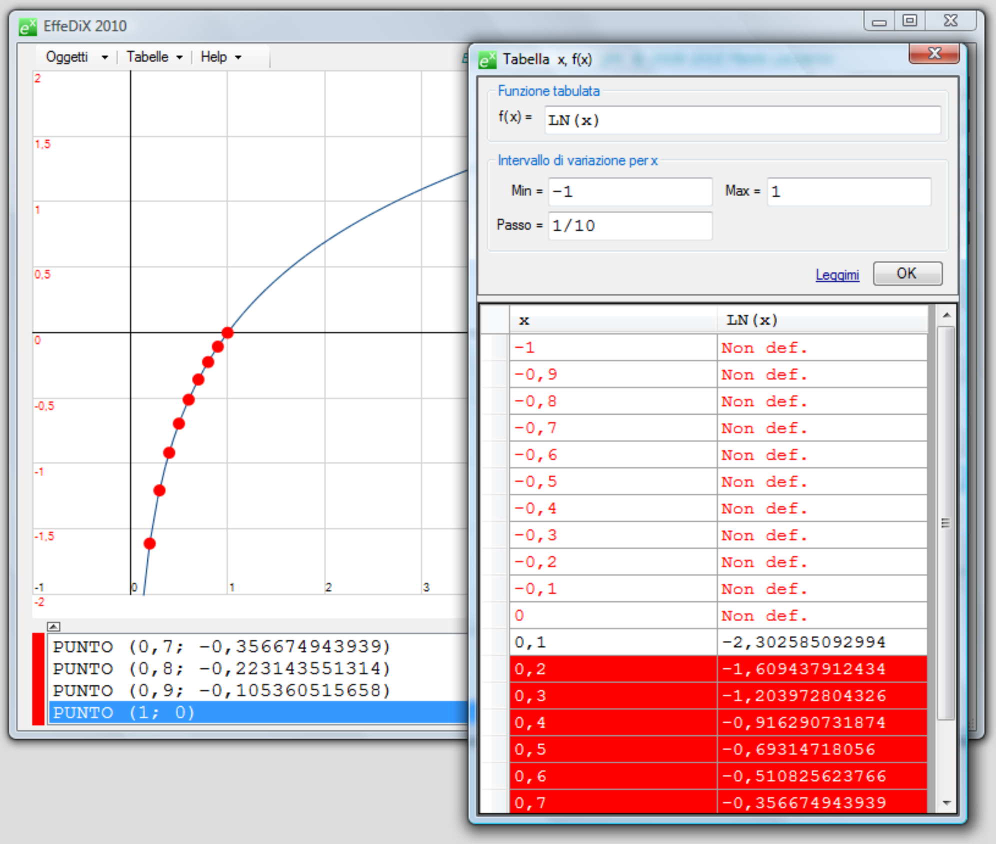


La colorazione delle righe della tabella ci fornisce indicazioni sull’andamento crescente o decrescente della funzione e precisamente:

- le righe sono in rosso se il valore della funzione è maggiore o uguale al precedente valore in tabella e minore o uguale al successivo;
- le righe sono in azzurro se il valore della funzione è minore o uguale al precedente valore in tabella e maggiore o uguale al successivo;
- le righe sono in bianco in tutti gli altri casi.

Facendo doppio clic sulle righe della tabella potete tracciare i relativi punti sul grafico che rispetterranno la colorazione (a righe bianche corrispondo punti neri).

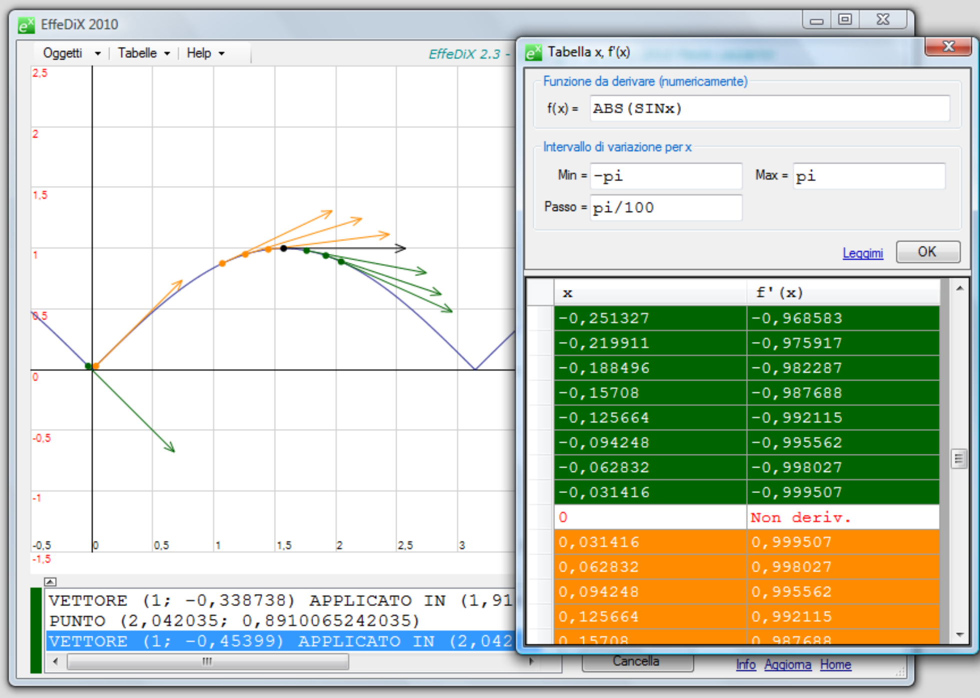
Tenete presente che EffeDiX segnalerà eventuali valori nell’intervallo di tabulazione in cui la funzione **non è definita**; ad esempio nella tabella seguente si è impostato l’intervallo di tabulazione da -1 a 1 per la funzione *LN(x)*.



Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

Tabella x, f'(x)

Nella figura seguente vedete la tabella relativa alla derivata della funzione *f(x)= ABS(SINx)* tabulata nell'intervallo da –pi a pi con passo pi/100.

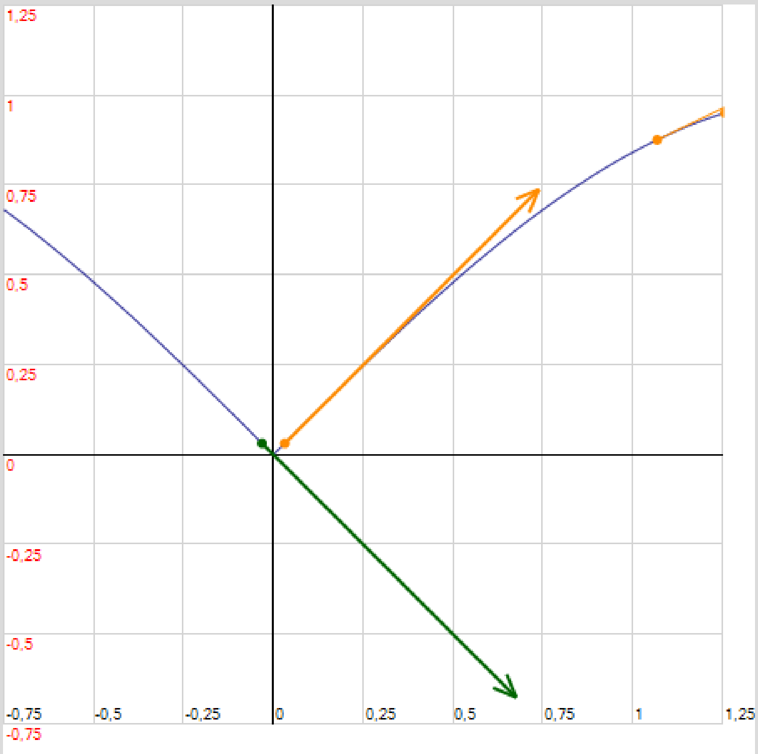


La colorazione delle righe della tabella ha questo significato:

- le righe sono in arancione se f’(x) > 0 (e quindi f(x) è crescente);
- le righe sono in verde se f’(x) < 0 (e quindi f(x) è decrescente);
- le righe sono in bianco in tutti gli altri casi (e quindi, se f’(x) è definita, sarà f’(x)=0 e x è un punto stazionario).

Facendo doppio clic su una riga della tabella potrete tracciare il relativo versore tangente al grafico di f(x), la cui pendenza è f’(x).

Tenete presente che EffeDiX segnalerà eventuali valori nell’intervallo di tabulazione in cui la funzione **non è derivabile**. Ad esempio, riferendosi alla tabella precedente, la funzione non è derivabile in x=0; notate inoltre che sono stati tracciati alcuni versori tangenti al grafico di f(x), in particolare nei punti 0-pi/100 e 0+pi/100.



Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

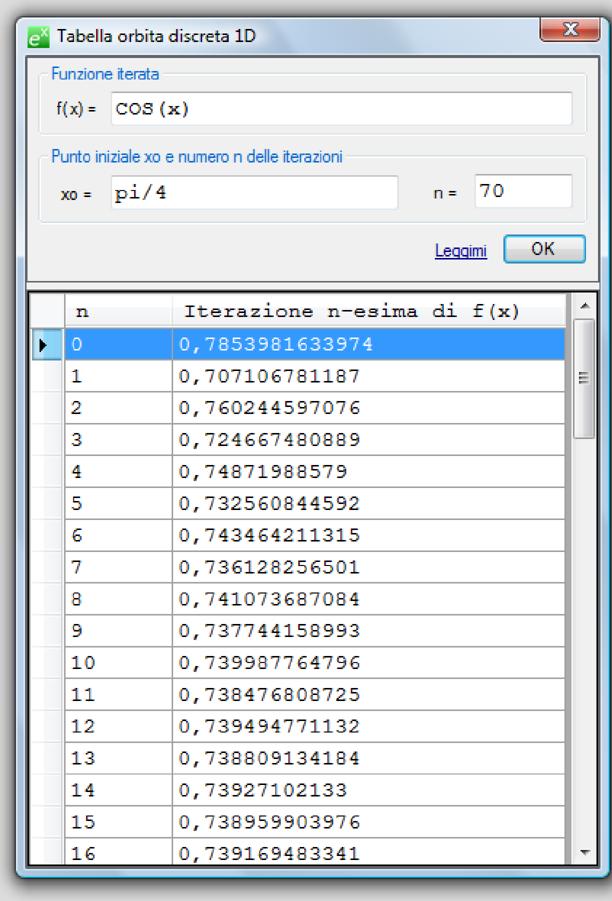
Tabella orbita discreta 1D

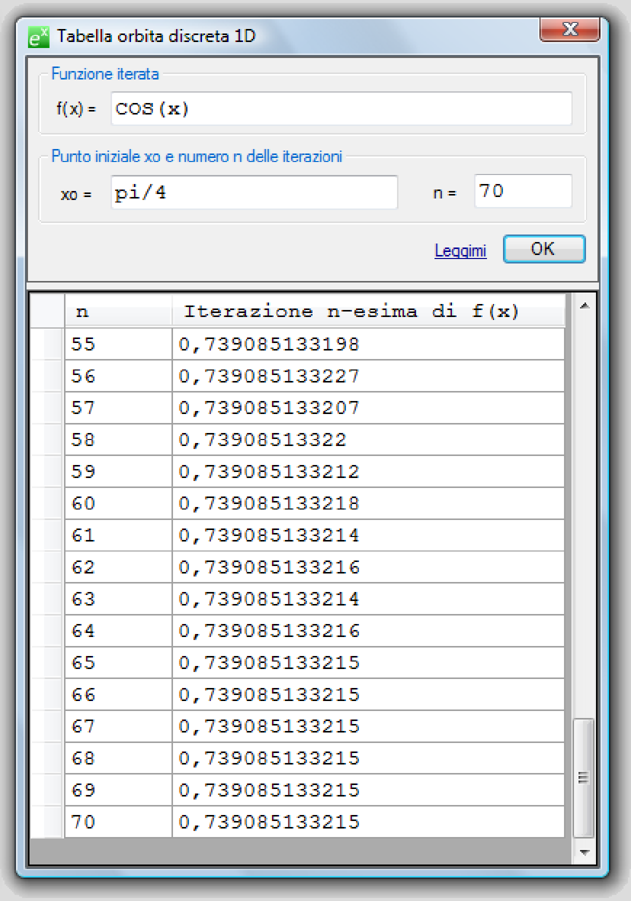
Data una funzione f(x), un punto iniziale x_0 e il numero n di iterazioni, la tabella è costituita dalle seguenti coppie di valori

i=0, x_0
i=1, $x_1 = f(x_0)$
i=2, $x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$
i=3, $x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)))$

… …
i=n, $x_n = f(x_{n-1})$

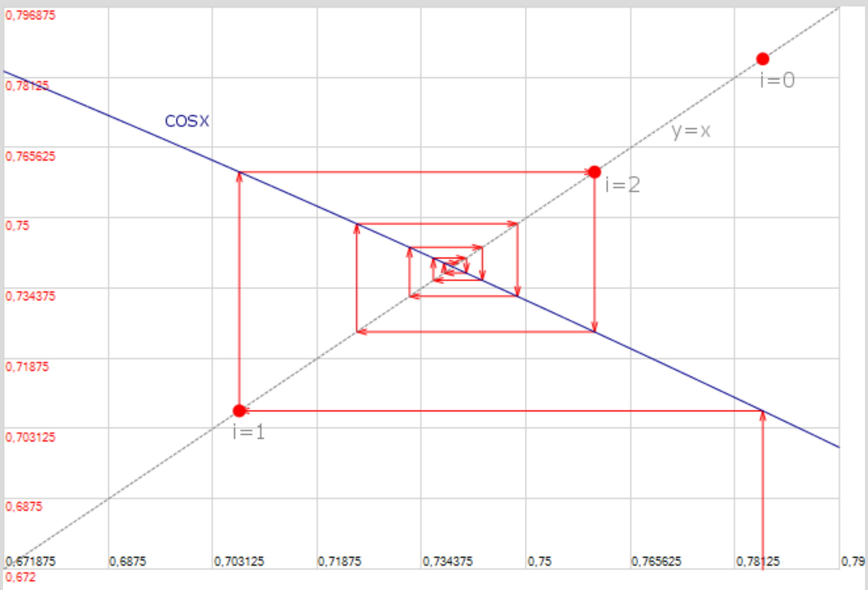
Nella figura seguente vedete ad esempio la tabella relativa alla funzione *f(x) = COSx* con x_0=pi/4 e n= 70.





Notate che a partire dalla 65-esima iterazione i valori x_i si stabilizzano.

Facendo clic sulle righe della tabella sarà tracciato il relativo punto dell'orbita; più precisamente, facendo clic sulla riga i-esima sarà tracciato il punto (x_i, x_i) sulla bisettrice del primo e terzo quadrante. In figura sono tracciati in questo modo, in rosso, i primi 3 punti dell'orbita (il diagramma a ragnatela è stato invece tracciato con l'opzione *Oggetti - Orbita discreta 1D*, vedi più avanti).



Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

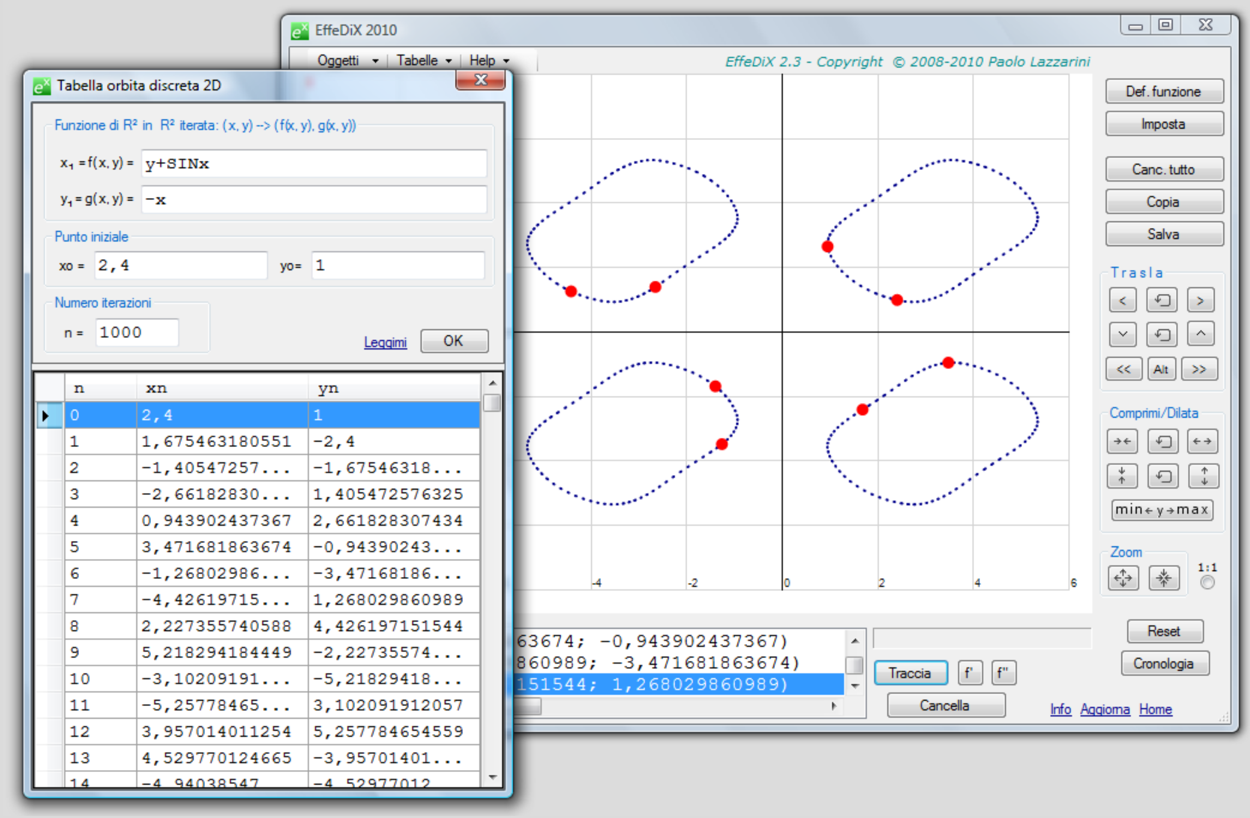
Tabella orbita discreta 2D

Data una funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che manda il punto (x, y) nel punto (f(x, y), g(x, y)), dato un punto iniziale (x_0, y_0) e il numero n di iterazioni, la tabella è costituita dalle seguenti terne di valori

i=0,	x_0,	y_0
i=1,	$x_1 = f(x_0, y_0)$,	$y_1 = g(x_0, y_0)$
i=2,	$x_2 = f(x_1, y_1)$,	$y_2 = g(x_1, y_1)$
i=3,	$x_3 = f(x_2, y_2)$,	$y_3 = g(x_2, y_2)$
…	…	…
i=n,	$x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})$,	$y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1})$

Nella figura seguente vedete ad esempio la tabella relativa alla funzione che manda il punto (x, y) nel punto (y+sinx, -x), al punto iniziale (2,4; 1) e al numero di iterazioni n=1000 (in questo caso, quindi, f(x,y) = y+sinx e g(x,y) = -x).

Facendo clic sulle righe della tabella sarà tracciato il relativo punto dell'orbita. In figura sono tracciati in questo modo, in rosso, i primi 8 punti i punti dell'orbita (l'orbita, in blu, è invece tracciata utilizzando l'opzione *Oggetti - Orbita discreta 2D*, vedi più avanti).



Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

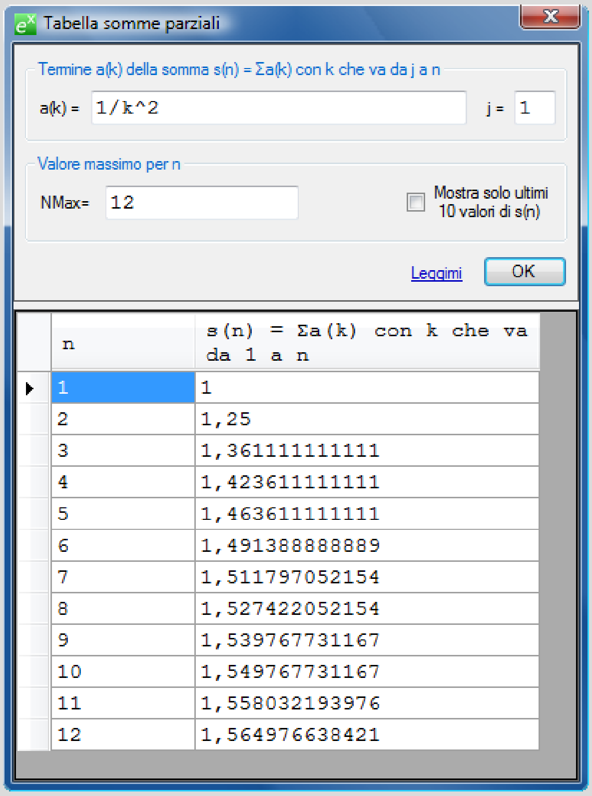
Tabella somme parziali

Nella figura a fianco vedete la tabella relativa alla successione s(n) di somme parziali con

$$s(n) = \sum_{k=j}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{e} \quad j=1$$

La successione viene tabulata fino a NMax = 12.

Facendo doppio clic su una riga della tabella sarà tracciato il punto corrispondente della successione s(n).

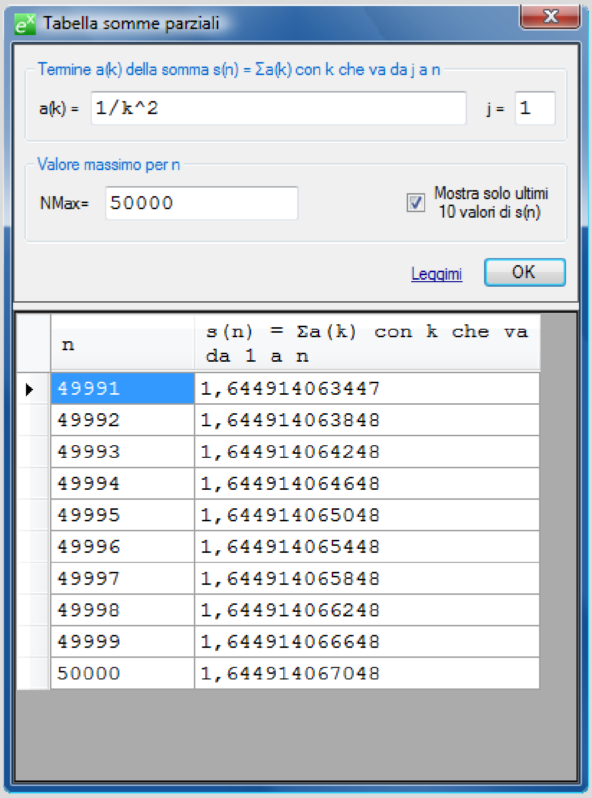


Nella figura a fianco vedete un'altra tabella relativa alla stessa successione. Qui i termini calcolati sono 50000 ma quelli visualizzati sono solo gli ultimi 10 a causa della spunta sulla casella *Mostra solo ultimi 10 valori di s(n)*.

Notate che s(50000) fornisce un'approssimazione con **solo** 4 cifre decimali esatte di

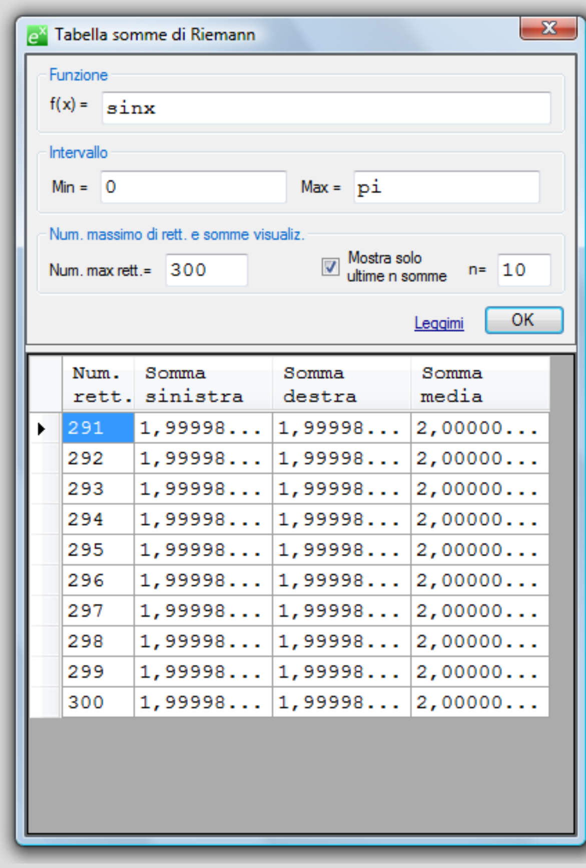
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \cong 1{,}644934066852$$

(qui s(n) converge molto lentamente, al contrario di quanto accadeva ad esempio nel caso di $s(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$, vedi tabella).



Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

Tabella somme di Riemann

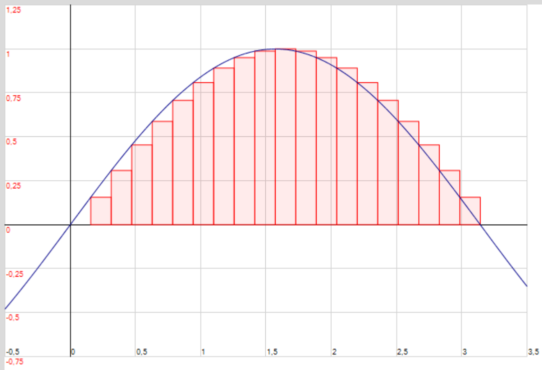


Num. rett.	Somma sinistra	Somma destra	Somma media
291	1,99998...	1,99998...	2,00000...
292	1,99998...	1,99998...	2,00000...
293	1,99998...	1,99998...	2,00000...
294	1,99998...	1,99998...	2,00000...
295	1,99998...	1,99998...	2,00000...
296	1,99998...	1,99998...	2,00000...
297	1,99998...	1,99998...	2,00000...
298	1,99998...	1,99998...	2,00000...
299	1,99998...	1,99998...	2,00000...
300	1,99998...	1,99998...	2,00000...

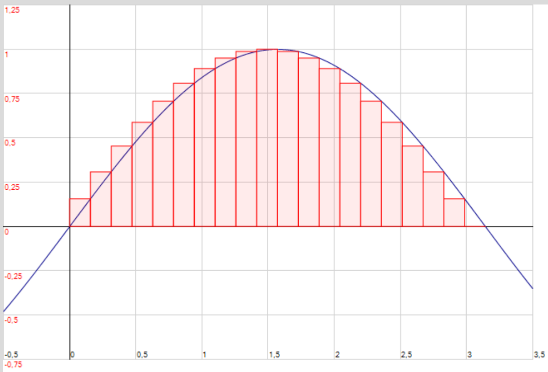
Nella figura a fianco vedete la tabella delle somme di Riemann per la funzione sin(x). L'intervallo considerato è da 0 a PI e le somme visualizzate (sinistra, destra e media) sono relative a 291, 292, …, 300 rettangoli. Come si vede le somme hanno le prime cinque cifre decimali stabili. La somma media fornisce, in generale, il risultato più accurato (come in questo caso in cui il valore esatto dell'integrale definito è 2).

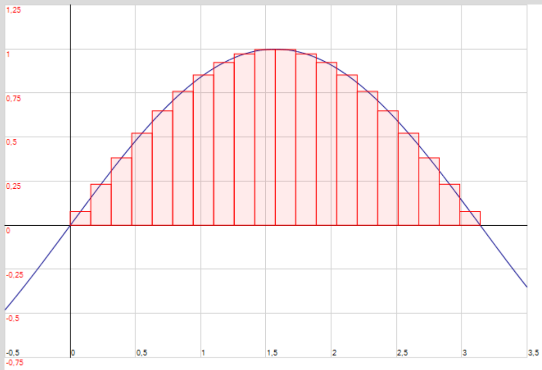
Tenete presente che è possibile modificare la larghezza delle colonne della tabella (per poter leggere tutte le cifre) semplicemente trascinando i bordi nella riga delle intestazioni.

Le schermate seguenti mostrano l'interpretazione geometrica, come area di **plurirettangoli**, rispettivamente della somma sinistra, destra e media (relative a 20 rettangoli). La base *h* di ciascun rettangolo è uguale all'ampiezza dell'intervallo di integrazione (nel nostro caso PI) diviso per il numero dei rettangoli (nel nostro caso 20).



Per la somma **sinistra** il punto x_i è, in ciascun intervallo, l'estremo sinistro e l'area del rettangolo i-esimo è quindi $f(x_i)h$. Per la somma **destra** il punto x_i è l'estremo destro e per la somma **media** è il punto medio di ciascun intervallo.





Per tracciare i plurirettangoli utilizzate la relativa opzione del menu degli oggetti grafici.

Facendo clic col pulsante destro sulla tabella si apre un menu contestuale che consente di salvare la tabella su un file testo (delimitato da tabulazione). I dati così salvati possono essere importati nelle finestre di impostazione relative alle opzioni: grafico a dispersione, curva spline, curva di regressione. I file di testo delimitati da tabulazione sono inoltre compatibili con Excel.

Tabella curva integrale

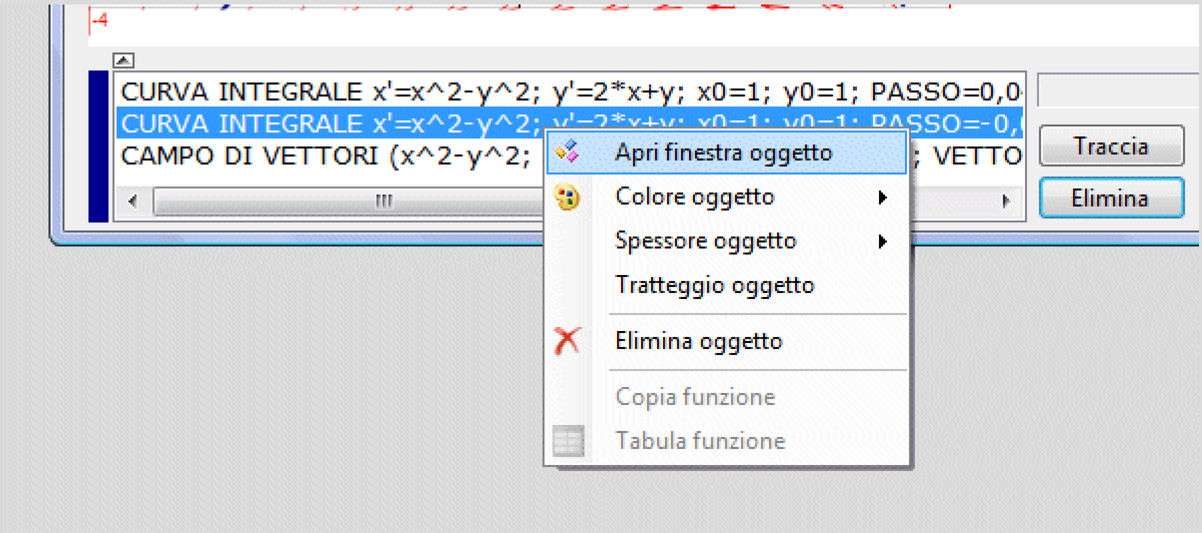
Vedi Equazioni differenziali

Salvare gli oggetti grafici in un file FDX

Nel menu *File* trovate le opzioni *Salva* e *Salva con nome* che vi consentono di salvare tutti gli oggetti grafici presenti nel piano (con le loro impostazioni: colore, spessore, ecc.), tutti i parametri con i relativi intervalli e tutte le impostazioni del piano. I file generati da EffeDiX hanno l'estensione fdx.

Aprire la finestra di impostazione di un oggetto già presente nel box degli oggetti grafici

Potete riaprire la finestra di impostazione di qualsiasi oggetto presente nel box degli oggetti grafici selezionando l'oggetto e facendo clic col pulsante destro del mouse: si aprirà un menu contestuale (vedi figura) e basterà fare clic sull'opzione *Apri finestra oggetto*. In tal modo potete reinserire l'oggetto dopo aver effettuato le modifiche desiderate. Se volete sostituire il nuovo oggetto all'oggetto di partenza dovete eliminare l'oggetto di partenza (dopo averlo selezionato).



Copiare o salvare l'immagine del piano

Utilizzando il pulsante *Copia* potrete copiare in memoria (clipboard) il piano cartesiano con i grafici attualmente visualizzati; potrete poi incollare l'immagine bitmap in qualsiasi altro ambiente (Word, PowerPoint, Excel, ecc.) utilizzando il pulsante *Incolla* di questi programmi. Una volta trasferita l'immagine in un altro ambiente (ad esempio Word) potrete anche stamparla (EffeDiX non dispone di un suo servizio di stampa).

Per salvare su file l'immagine del piano cartesiano con i grafici attualmente visualizzati, utilizzerete l'opzione *Salva immagine* del menu *File*. Potrete salvare l'immagine bitmap in uno dei seguenti formati: PNG, JPEG, BMP, GIF, TIFF. Il formato più conveniente per compattezza, fedeltà e trasportabilità è il formato PNG.

Cronologia

Facendo clic sul pulsante *Cronologia* aprirete una finestra “listbox” in cui sono annotate **tutte** le operazioni effettuate sia di tracciamento di oggetti sia di impostazione del piano sia di dichiarazione di parametri. Non vengono memorizzate le caratteristiche degli oggetti (colore, spessore, ecc.). Ogni operazione corrisponde ad una singola riga della finestra. Tutte le operazioni vengono salvate a partire dall’ultima cancellazione effettuata (pulsante *Cancella tutto* della finestra *Cronologia*). Potrete riorganizzare la finestra della cronologia cancellando una singola riga (quella selezionata) o modificando l’ordine delle righe. Potrete anche salvare una finestra di cronologia su file e poi recuperarla.

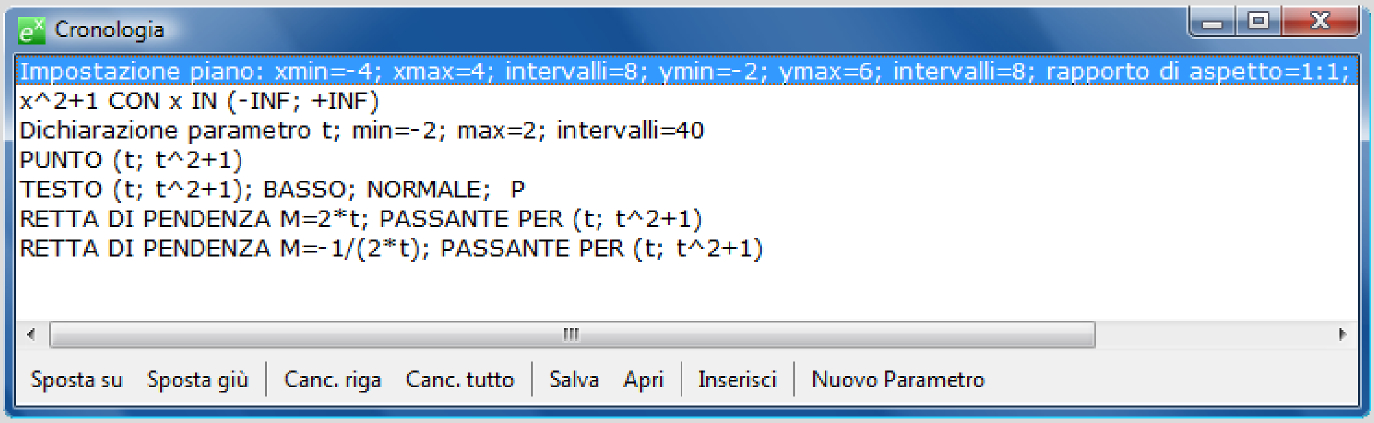
Per eseguire una operazione presente in cronologia fare doppio clic sulla relativa riga oppure selezionare la riga e fare clic sul pulsante *Inserisci*.

Creare presentazioni animate

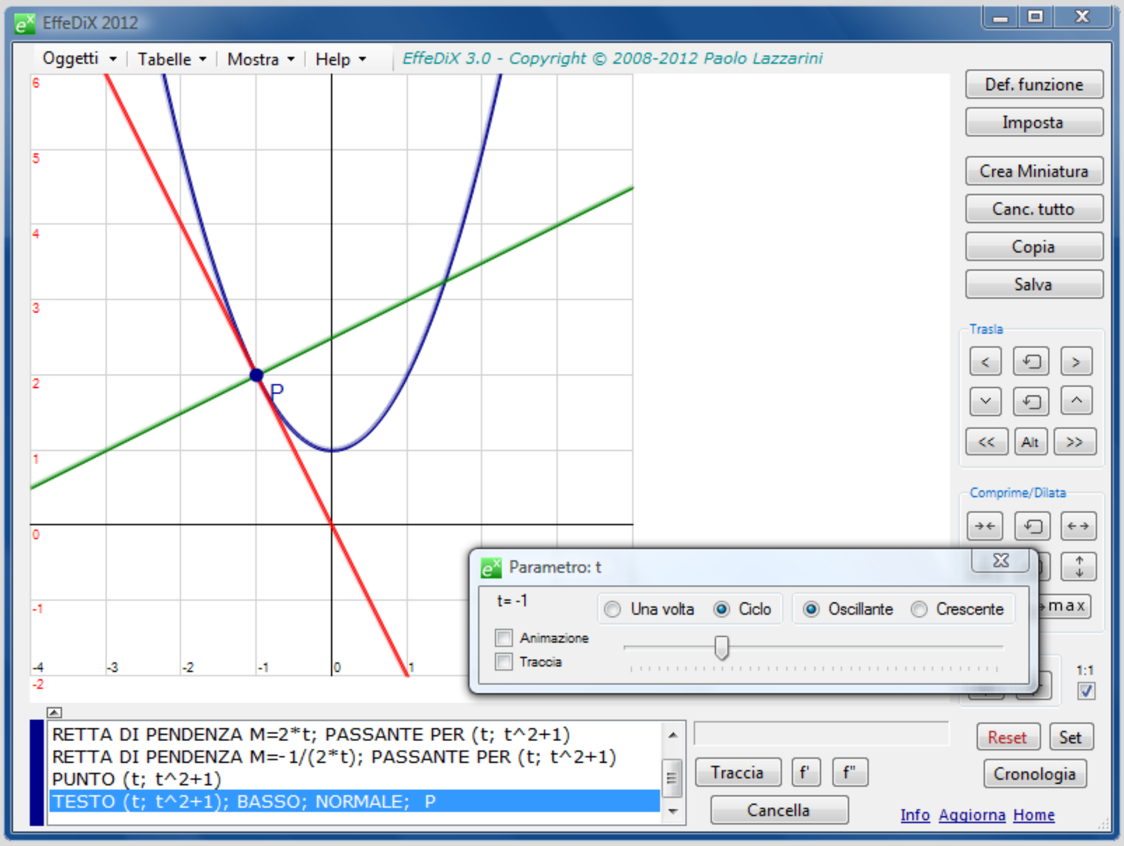
Tutti gli oggetti grafici di EffeDiX sono definiti fornendo opportuni dati (che possono essere coordinate, coefficienti, componenti, ecc.). Le nostre costruzioni saranno **dinamiche** se i dati che definiscono gli oggetti **dipenderanno da uno o più parametri**; potremo sempre, infatti, far variare un parametro sia manualmente (mediante una slider bar) sia in modalità animazione. A questo proposito tenete presente che quasi tutti i campi di input di EffeDiX consentono non solo l’inserimento di valori numerici ma anche l’inserimento di espressioni, di qualsiasi complessità, contenenti uno o più parametri. Nel digitare queste espressioni dovete tener presente che i nomi delle funzioni (sqrt, sin, cos, ecc.) devono sempre essere digitati in caratteri tutti minuscoli o tutti maiuscoli mentre i parametri in caratteri minuscoli (e anche le lettere x e y, se fosse lecito utilizzarle). In tutti campi è inoltre abilitato lo scroll orizzontale. Ora un esempio per chiarire quanto detto.

Esempio Tracciare dinamicamente tangente e normale in un punto generico P della parabola di equazione $y=x^2+1$.

Ecco la cronologia:



E questa è la costruzione dinamica che si ottiene:

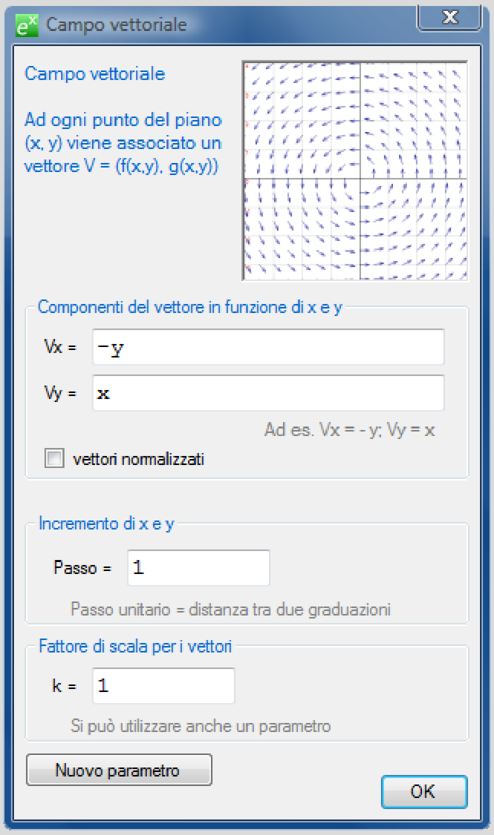


Trascinando il cursore della slider bar potete far variare manualmente il punto P oppure facendo clic sulla casella *Animazione* della slider bar potete animare il punto.

Campi vettoriali

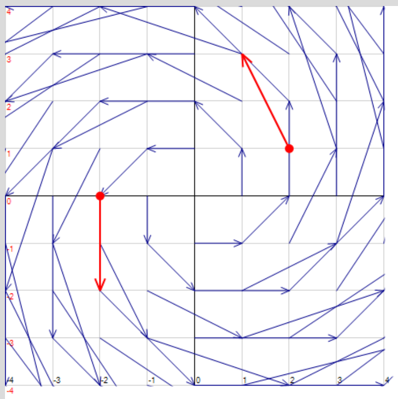
Per definire un **campo vettoriale** dobbiamo associare ad ogni punto P = (x, y) del piano un vettore V, che applicheremo in P, le cui componenti V_x e V_y sono funzioni del punto (x, y), cioè

$V_x = f(x, y)$
$V_y = g(x, y)$

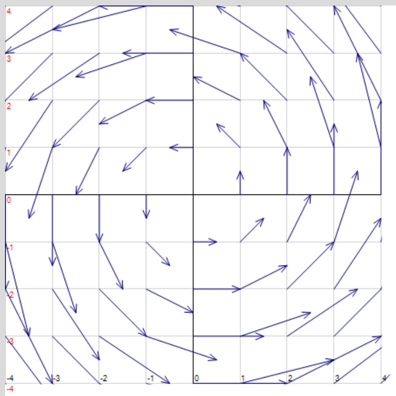


Qui a fianco vedete la finestra per tracciare un campo vettoriale; le impostazioni in questo caso sono:

$V_x = -y$
$V_y = x$,
passo=1
k=1 (fattore di scala per tutti i vettori)

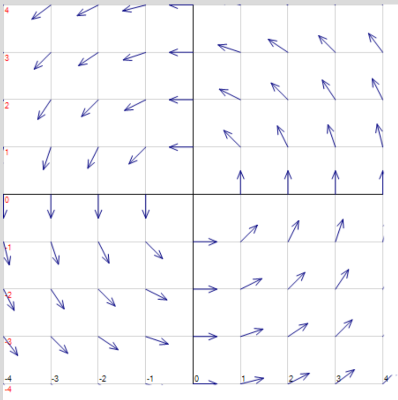


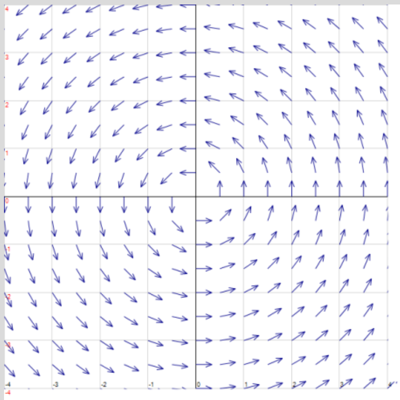
In figura sono evidenziati in rosso, ad esempio, due vettori. Il primo è applicato nel punto (2, 1) e ha componenti (-1, 2), il secondo è applicato in (-2, 0) e ha componenti (0, -2); in entrambi i casi la componente x è uguale a -y e la componente y a x. Il passo uguale a 1 significa che EffeDiX traccerà un vettore in ogni nodo della nostra griglia (relativamente alla griglia impostata). Il fattore di scala k=1 significa che i vettori sono tracciati in scala reale cioè i vettori hanno esattamente la loro lunghezza. Vedremo però che questa impostazione non è quasi mai conveniente perché i vettori si sovrappongono e l'immagine diventa indecifrabile; in molti casi sarà opportuno moltiplicare tutti i vettori per uno **stesso** fattore k (ad esempio k=1/2 o k=1/100).



Nella figura a fianco vedete lo stesso campo vettoriale di prima con k=1/2: tutti i vettori hanno lunghezza dimezzata.

Nella figura a fianco, a sinistra, i vettori sono stati **normalizzati** (spunta sulla casella *vettori normalizzati*), cioè ogni vettore viene diviso per il suo modulo in modo da avere lunghezza unitaria, ed è stato poi applicato un fattore di scala k=1/2: in tal modo tutti i vettori hanno lunghezza 1/2.

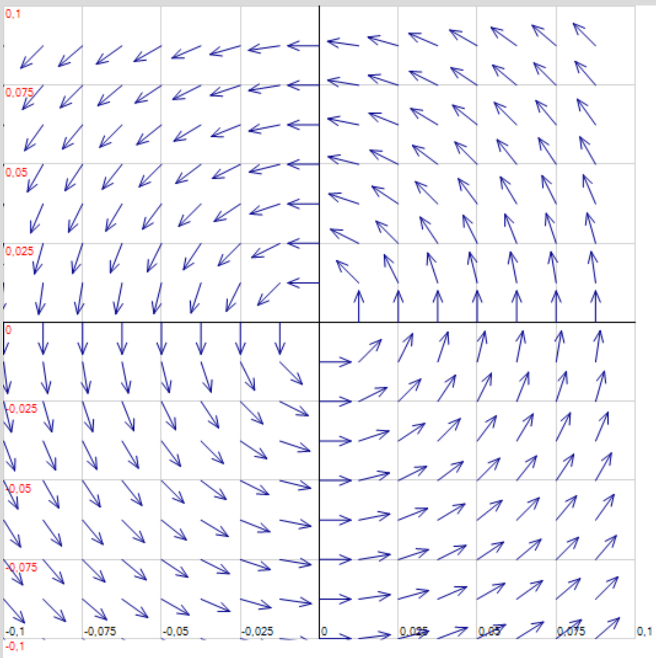




Nella figura a destra i vettori sono normalizzati e k è uguale a 1/3: questa volta però il passo è 1/2. Ciò significa che EffeDiX traccerà un vettore per ogni punto di una griglia ottenuta muovendosi di 1/2 passo alla volta nelle direzioni nord, sud, est, ovest (attenzione: mezzo passo significa metà della distanza tra due successive graduazioni su ciascun asse).

Tenete presente che se i vettori sono normalizzati significa che interessa solo la loro direzione e si perde l'informazione relativa al loro modulo; in questo caso parleremo di **campo di direzioni** piuttosto che di campo vettoriale.

Se avete intenzione di zoomare su un campo vettoriale dovete impostare un opportuno fattore di scala; la casa migliore è impostare un fattore di scala parametrico, ad esempio k=(1/2)^a (con a=0, 1, … , 8), in tal modo potrete comodamente scegliere il fattore più opportuno dopo ogni zoomata utilizzando la slider bar relativa al parametro *a*.



Nella figura a fianco vedete ad esempio il solito campo vettoriale nella regione di piano con x e y compresi tra -0,1 e 0,1 con 8 intervalli (quindi la distanza tra due graduazioni è di 2,5 centesimi); qui le impostazioni sono: vettori normalizzati, passo=1/2, k=1/100.

Esempio Considerata la funzione di due variabili $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, tracciare la (generica) curva di livello passante per il punto (h, k) e il campo vettoriale gradiente

$$\boldsymbol{\nabla f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (4x,\ 2y)$$

Verificare che il vettore gradiente è **perpendicolare** alle curve di livello in ogni loro punto.

Riferitevi alla figura seguente. Il campo vettoriale gradiente è dato dai vettori in grigio. Il punto rosso ha coordinate (h, k) e l'ellisse in rosso è la curva di livello passante per (h, k).

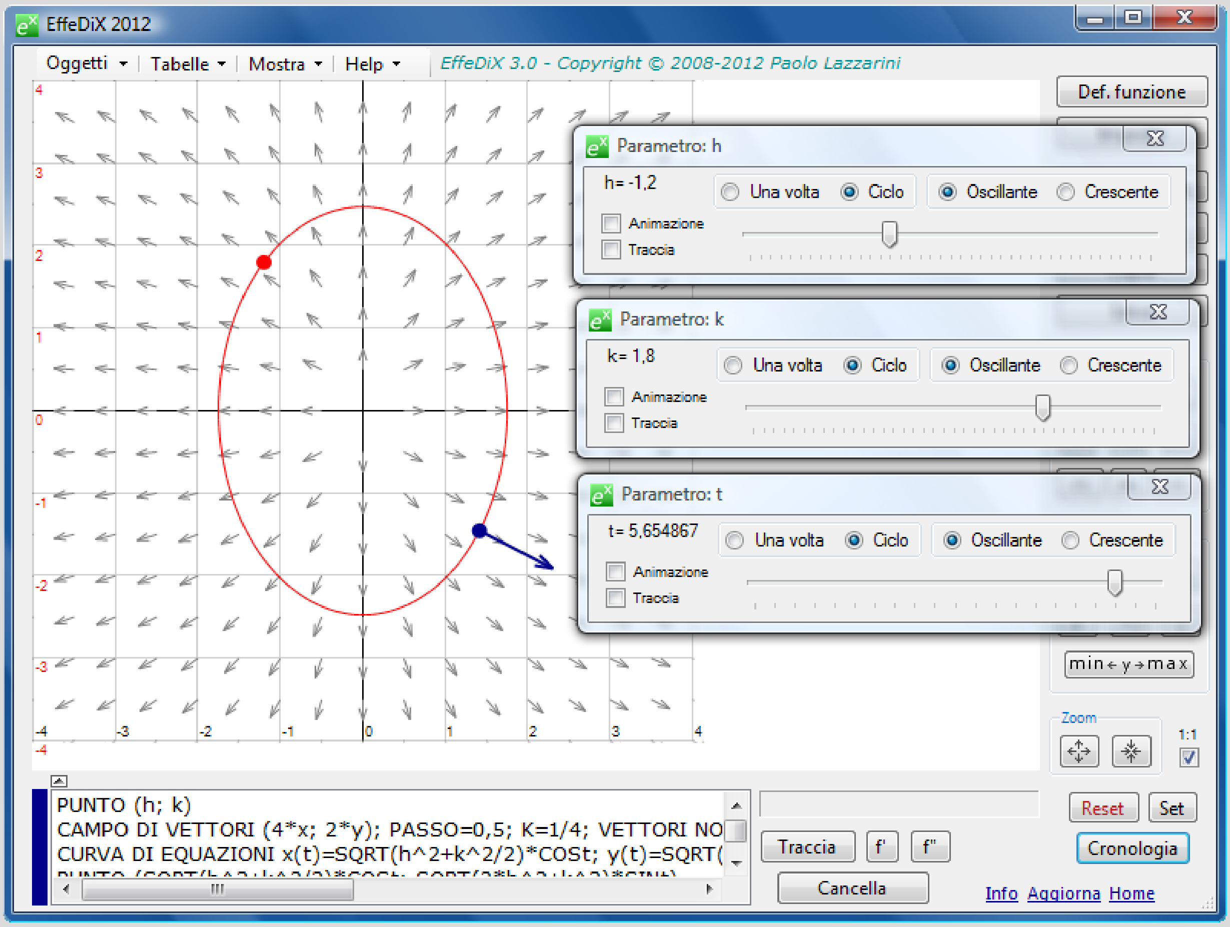
L'equazione dell'ellisse è

$$2x^2 + y^2 = 2h^2 + k^2$$

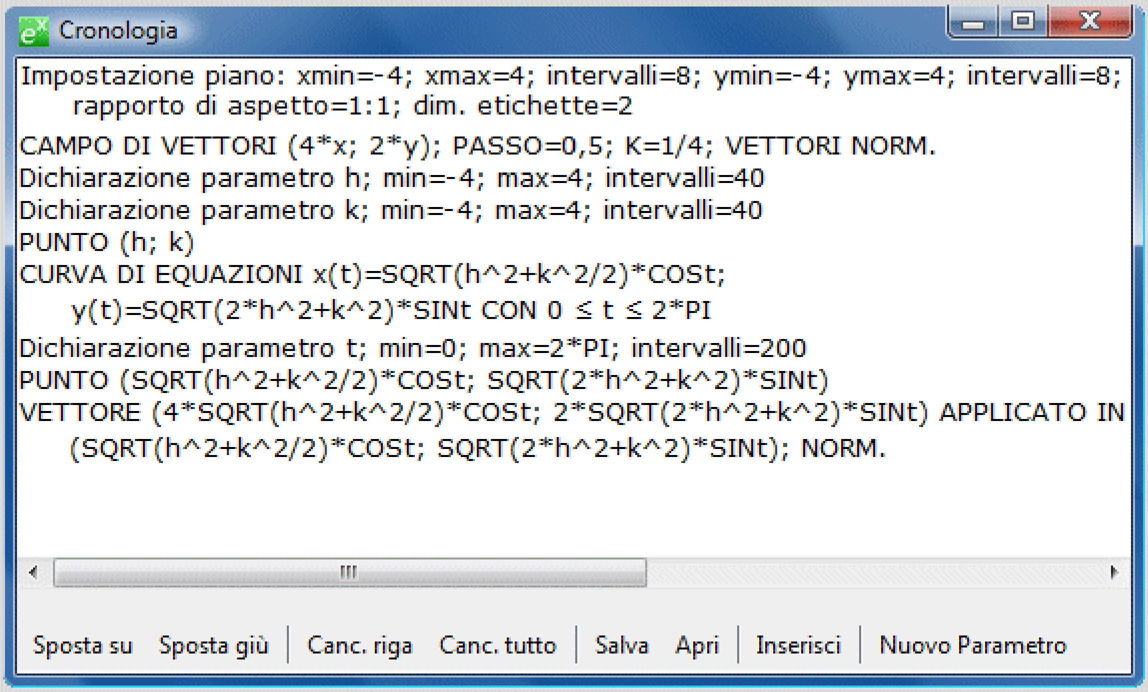
e in forma parametrica

$$x(t) = \sqrt{h^2 + k^2/2}\ cost$$
$$y(t) = \sqrt{2h^2 + k^2}\ sint$$

Agendo sulle slider bar relative ai parametri h e k possiamo ottenere tutte le curve di livello. Il punto azzurro è un generico punto della curva di livello relativo al valore del parametro *t* modificabile con la slider bar di *t*. Il vettore azzurro è il gradiente nel punto azzurro e può essere messo in animazione. Il vettore gradiente, come si vede, è perpendicolare alle curve di livello in ogni loro punto. Una rappresentazione di questo tipo può essere utile tenendo presente che il vettore gradiente indica la direzione di massima crescita della funzione f(x, y).



Ecco la cronologia delle operazioni generata da EffeDiX (qui si è scelto di visualizzare vettori normalizzati ma se siete interessati al modulo del gradiente cambiate l'impostazione):


Cronologia
Impostazione piano: xmin=-4; xmax=4; intervalli=8; ymin=-4; ymax=4; intervalli=8;
rapporto di aspetto=1:1; dim. etichette=2
CAMPO DI VETTORI (4*x; 2*y); PASSO=0,5; K=1/4; VETTORI NORM.
Dichiarazione parametro h; min=-4; max=4; intervalli=40
Dichiarazione parametro k; min=-4; max=4; intervalli=40
PUNTO (h; k)
CURVA DI EQUAZIONI x(t)=SQRT(h^2+k^2/2)*COSt;
y(t)=SQRT(2*h^2+k^2)*SINt CON 0 ≤ t ≤ 2*PI
Dichiarazione parametro t; min=0; max=2*PI; intervalli=200
PUNTO (SQRT(h^2+k^2/2)*COSt; SQRT(2*h^2+k^2)*SINt)
VETTORE (4*SQRT(h^2+k^2/2)*COSt; 2*SQRT(2*h^2+k^2)*SINt) APPLICATO IN
(SQRT(h^2+k^2/2)*COSt; SQRT(2*h^2+k^2)*SINt); NORM.
Sposta su
Sposta giù
Canc. riga
Canc. tutto
Salva
Apri
Inserisci
Nuovo Parametro

Equazioni differenziali

Sistemi autonomi di equazioni differenziali

Con EffeDiX potremo tracciare le soluzioni di sistemi di equazioni differenziali autonomi cioè della forma

$$(*)\quad \begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

dove $x=x(t)$ e $y=y(t)$ sono funzioni incognite. Un sistema di questo tipo si chiama **autonomo** perché nelle equazioni non appare esplicitamente la variabile indipendente t. Ogni soluzione del sistema è una curva parametrica di equazioni $x=x(t)$ e $y=y(t)$ tale che

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

e prende il nome di **curva integrale** o **traiettoria** o **orbita**.

Ad esempio il sistema

$$\begin{aligned} x' &= -6x-5y \\ y' &= 3x+2y \end{aligned}$$

è di questo tipo (ed è, in questo caso, lineare).

Il teorema di Cauchy garantisce che, sotto opportune ipotesi di regolarità per le funzioni $f(x, y)$ e $g(x, y)$, esiste, almeno localmente, un'**unica** coppia di funzioni $x(t)$, $y(t)$ che sia soluzione del sistema (*) e verifichi le **condizioni iniziali**

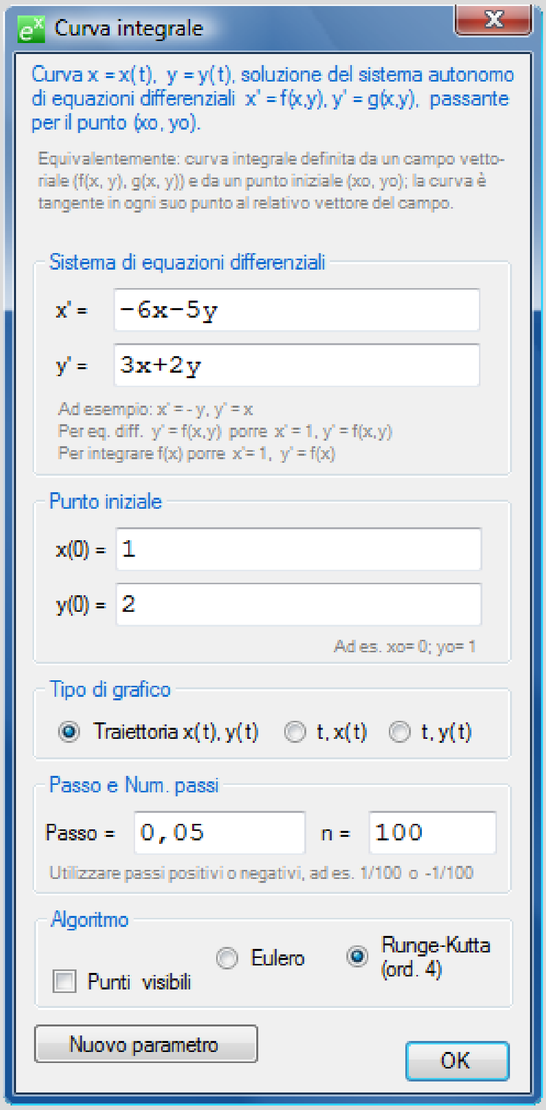
$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

cioè **esiste** ed è **unica** la curva integrale che passa per il punto (x_0, y_0). Si osservi però che il più delle volte **non siamo in grado di esprimere le funzioni x(t), y(t) in termini di funzioni elementari**.

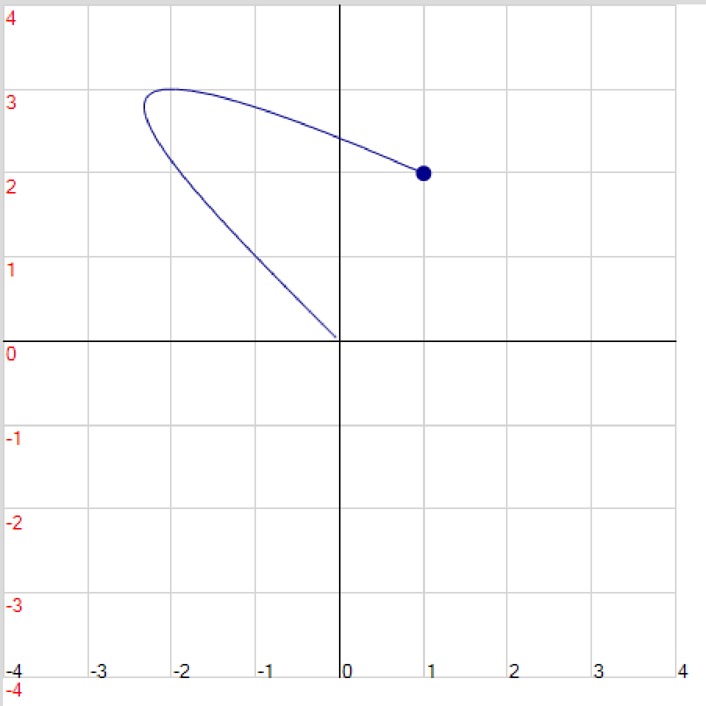
Utilizziamo l'opzione *Curva integrale* di EffeDiX per determinare graficamente l'unica soluzione del sistema

$$\begin{aligned} x' &= -6x-5y \\ y' &= 3x+2y \end{aligned}$$

passante, ad esempio, per il punto (1, 2). Qui a fianco vedete la finestra di impostazione. Il tipo di grafico selezionato è *Traiettoria*. Il passo è 0,05 e sono impostati 100 passi: questo significa che la

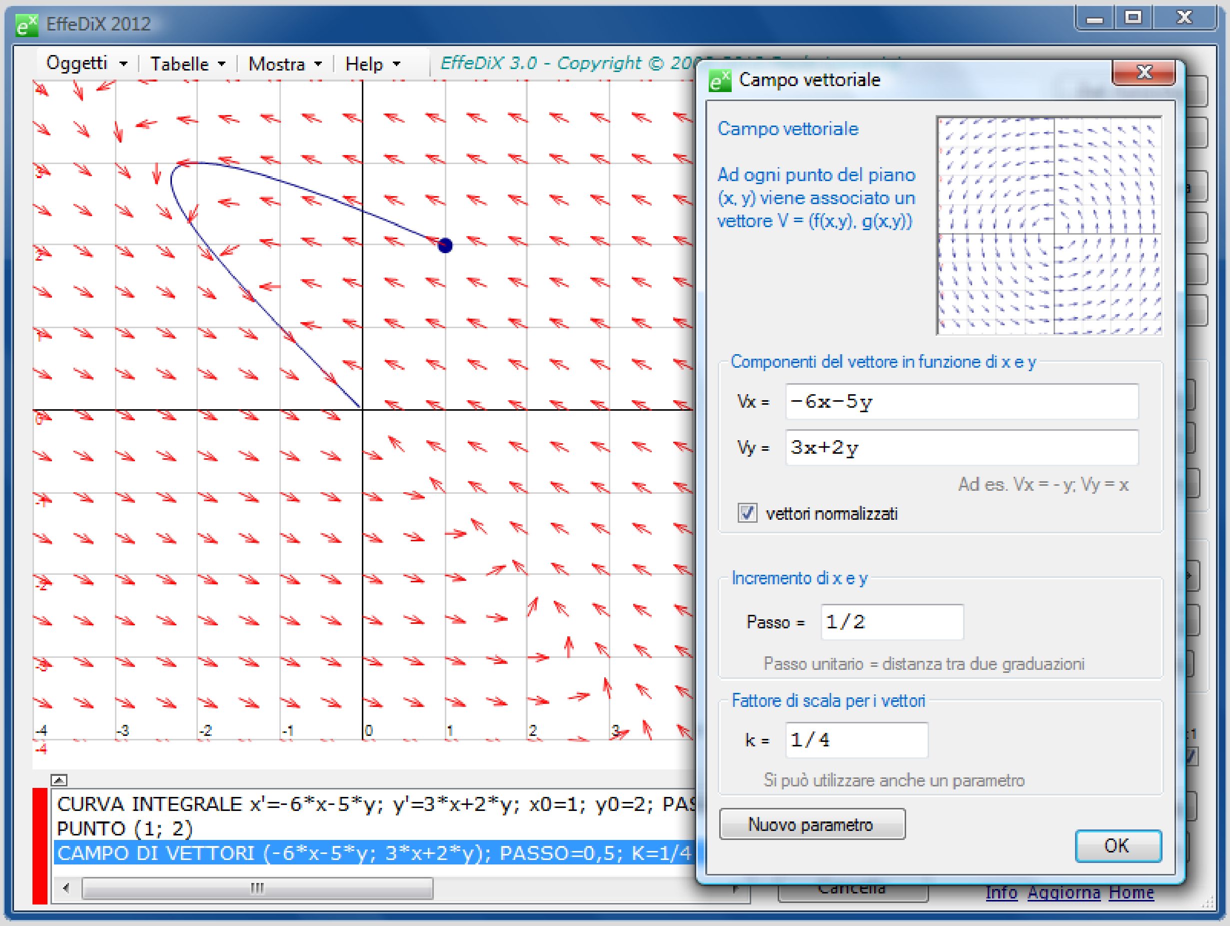


curva soluzione x(t), y(t) sarà tracciata per t che va da 0 a 0,05 * 100 = 5. Dei due possibili algoritmi per la soluzione numerica del sistema, l'algoritmo di Eulero e l'algoritmo di Runge-Kutta, è selezionato per impostazione predefinita il più efficiente dei due cioè Runge-Kutta. Qui a fianco vedete la curva soluzione tracciata da EffeDiX. E' stato anche tracciato il punto iniziale (1, 2).

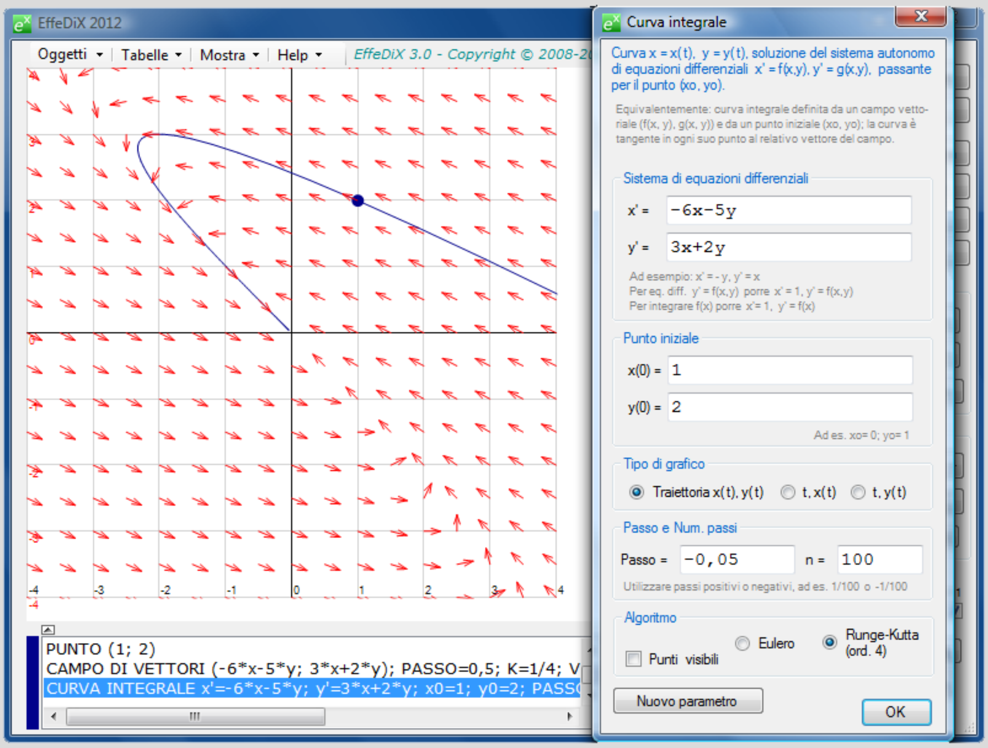


La figura a fianco mostra la curva soluzione ottenuta mettendo la spunta sulla casella *Punti visibili* della finestra di impostazione. Qui si vedono i 100 punti della traiettoria generati da EffeDiX (e si può notare che si addensano intorno all'origine).

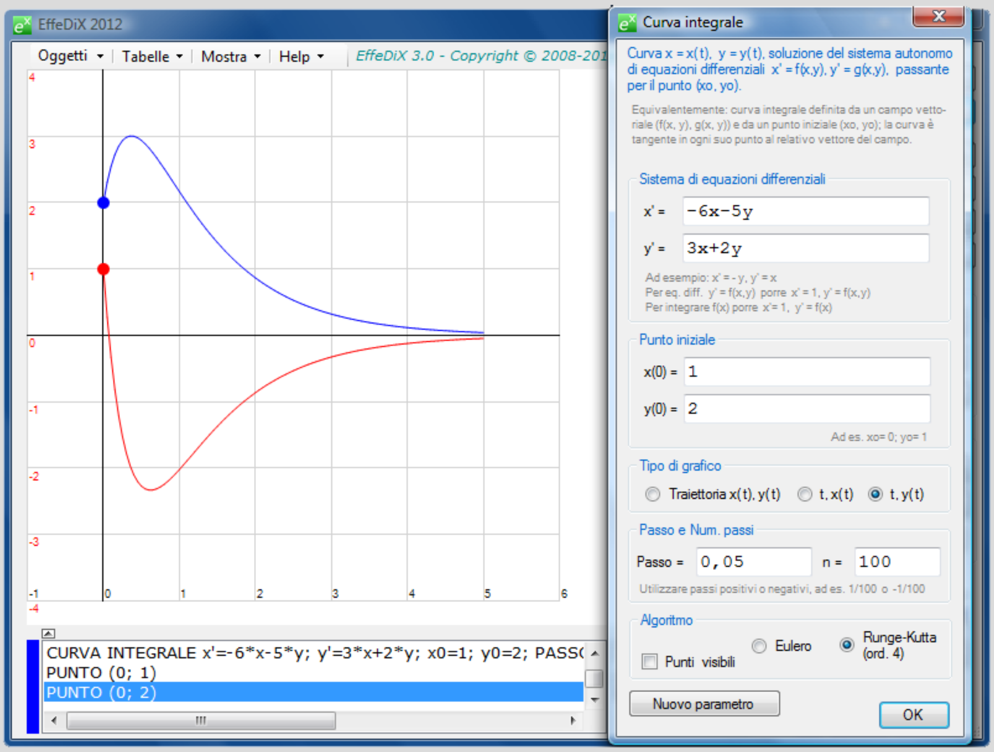
La schermata seguente mostra il **campo di direzioni** relativo al nostro sistema: la curva è tangente in ogni suo punto al relativo vettore del campo (provate a zoomare localmente sulla curva, trascinando il mouse mentre premete il pulsante destro).



E' anche possibile ottenere la traiettoria "all'indietro" impostando un passo negativo, ad esempio -0,05 (i punti della traiettoria si muovono, al decrescere di t e a partire dal punto iniziale, in senso opposto a quello dei vettori, vedi schermata seguente).



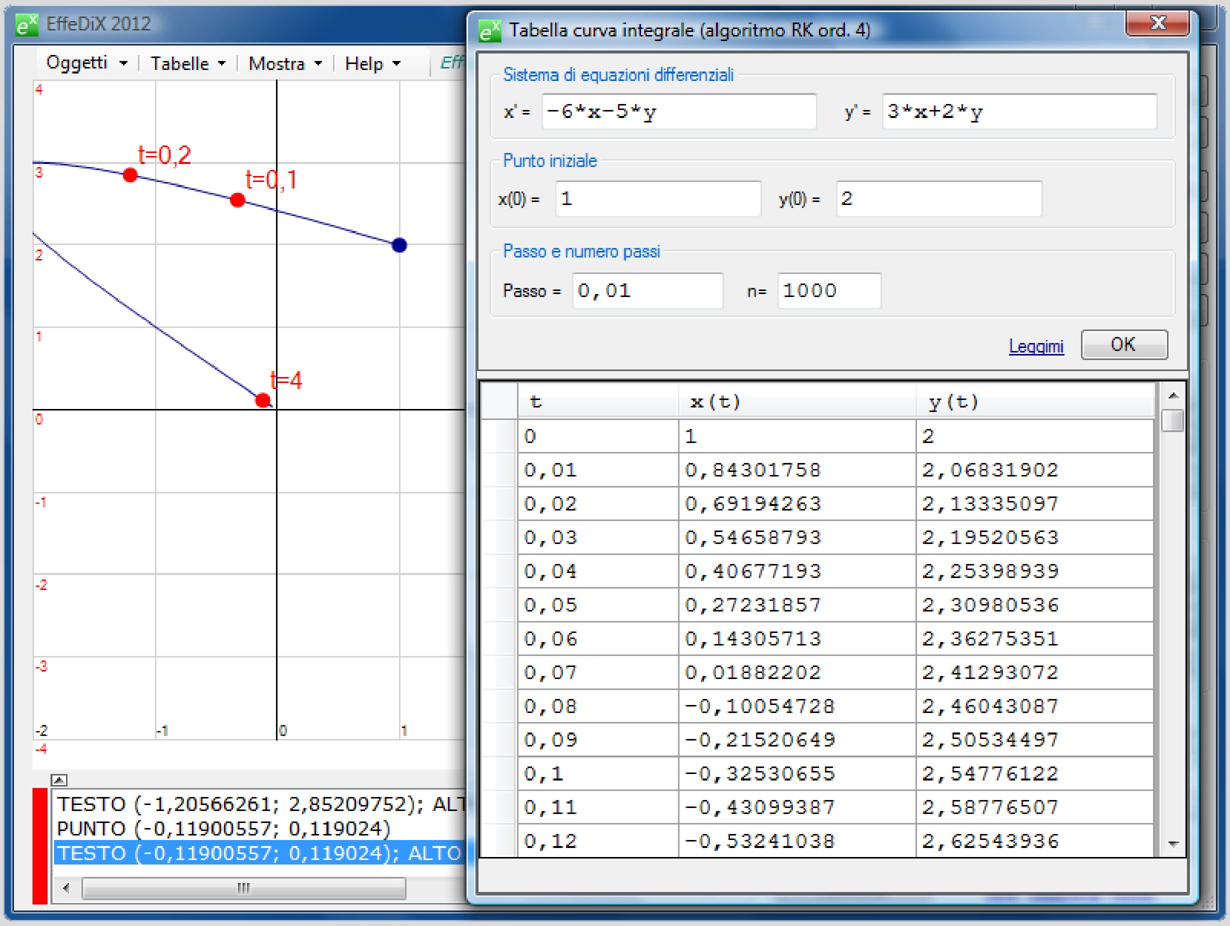
Se nella finestra di impostazione scegliete il *Tipo di grafico* (t, x(t)), otterrete il grafico della funzione x(t) al variare di t. Notate che, se il passo è 0,05 e il numero di passi 100, t varia da 0 a 5. Analogamente, impostando il *Tipo di grafico* (t, y(t)), otterrete il grafico della funzione y(t) al variare di t (nella schermata seguente vedete in rosso il grafico di x(t) e in blu quello di y(t), notate che x(0)=1 e y(0)=2).



Nel nostro caso possiamo risolvere il problema di Cauchy in termini di funzioni elementari; la soluzione analitica è fornita dalle funzioni

$$x(t) = \frac{15}{2}e^{-3t} - \frac{13}{2}e^{-t}$$
$$y(t) = -\frac{9}{2}e^{-3t} + \frac{13}{2}e^{-t}$$

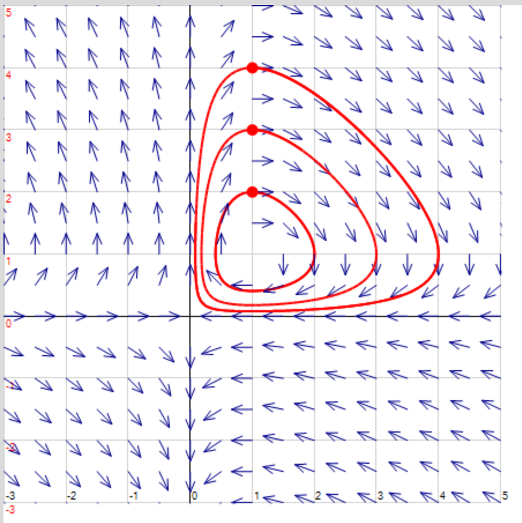
Potete verificare che il grafico della soluzione analitica (tracciabile con l'opzione *Curva parametrica*) si sovrappone al grafico generato da EffeDiX mediante l'algoritmo di Runge-Kutta. Per ottenere valori accurati per le funzioni x(t), y(t) si può generare una tabella mediante l'opzione *Tabella curva integrale*. Nella schermata seguente vedete la tabella relativa al nostro sistema e al solito punto iniziale; per avere una maggiore accuratezza qui si è scelto un passo uguale a 0,01 (e sono impostati 1000 passi per cui t varia tra 0 e 10). Facendo doppio clic su una riga della tabella viene tracciato, in rosso, il relativo punto della traiettoria; ad esempio nella schermata seguente vedete i punti relativi a t=0,1, a t=0,2 e a t=4.



Esempio Determinare graficamente le curve soluzione del sistema autonomo (del tipo preda-predatore)

$$x' = -x + xy$$
$$y' = y - xy$$

passanti rispettivamente per i punti (1, 2), (1, 3), (1, 4). Qui la funzione x(t) indica il numero dei **predatori** in funzione del tempo (ad esempio il numero dei lupi in un determinato territorio) e y(t) il numero delle **prede** (ad esempio il numero dei conigli). Questo sistema di equazioni differenziali è **non lineare**; le sue equazioni sono note come equazioni di Volterra-Lotka.



Ecco le operazioni da eseguire per tracciare le tre curve soluzione di equazioni parametriche x(t), y(t).

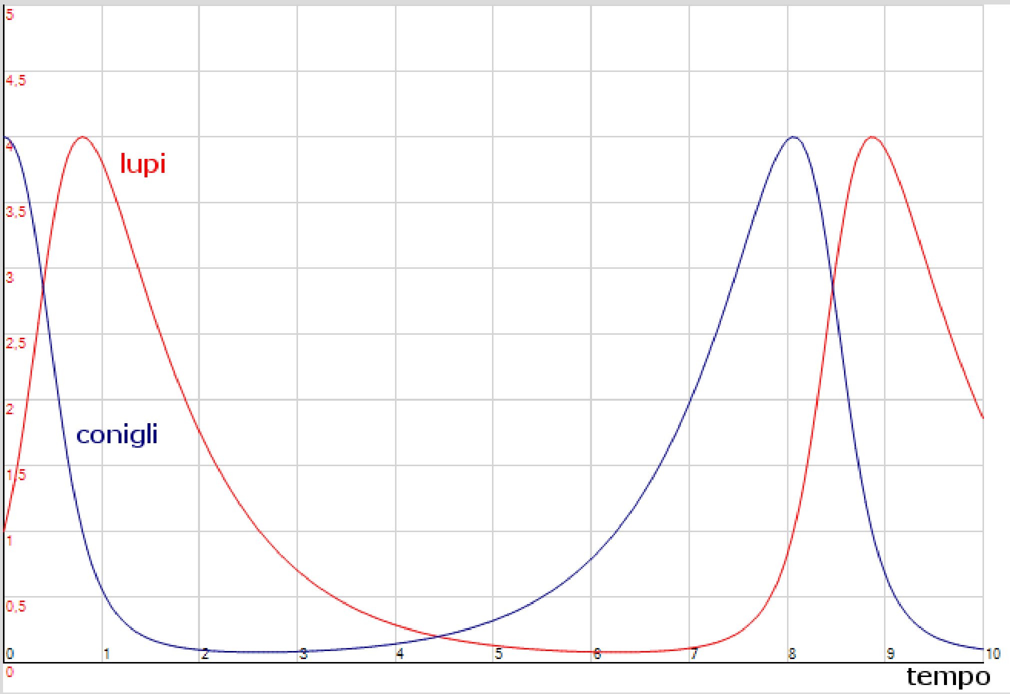
a. Tracciamo il campo vettoriale associato al sistema; non è un'operazione necessaria al fine di tracciare le curve soluzione con EffeDiX ma è importante per capire in che senso sono percorse le traiettorie al crescere di t (verso dei vettori). Allora: opzione *Campo vettoriale* con le impostazioni V_x=-x+xy, V_y=y-xy, vettori normalizzati (ai nostri fini non interessa il modulo dei vettori), passo 1/2, fattore di scala=1/4. Questi ultimi due valori possono naturalmente variare secondo i vostri scopi.

b. Tracciamo la traiettoria passante per il punto (1, 2). Opzione *Curva integrale* con le impostazioni $x'=-x+xy$, $y'=y-xy$, $x_0=1$, $y_0=2$, tipo di grafico = traiettoria, passo=0,1, numero passi = 100, algoritmo RK. I parametri *passo* e *n* (numero passi) possono naturalmente variare: se vogliamo soluzioni più accurate ridurremo il passo e aumenteremo il numero di passi (riducendo il passo senza aumentare il numero di passi avremo soluzioni più accurate ma tratti di curva più brevi, fate degli esperimenti). Tracciamo anche il punto iniziale (1, 2) (opzione *Punto*).

c. Tracciamo le altre due traiettorie modificando solo le coordinate del punto iniziale x_0, y_0.

In situazioni come questa è anche interessante **parametrizzare il punto iniziale** per animare le curve soluzione nel piano delle fasi.

Tracciamo ora i grafici delle funzioni x(t) e y(t) relative al punto iniziale (1, 4). Dovremo semplicemente cambiare il *Tipo di grafico*, lasciando invariate tutte le altre impostazioni. Nella figura seguente vedete i due grafici (in rosso quello di x(t), in blu quello di y(t)). Tenendo conto delle nostre impostazioni il tempo varia tra 0 e 10.



Equazioni differenziali del primo ordine

Vediamo come procedere per tracciare la soluzione di un'equazione differenziale del primo ordine posta nella forma

$$y' = f(x, y)$$

con la condizione iniziale $y(x_0)=y_0$ (problema di Cauchy).

Utilizzeremo l'opzione *Curva integrale*, riconducendo l'equazione al sistema equivalente

$$x' = 1$$
$$y' = f(x,y)$$

con le condizioni iniziali $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$.

Consideriamo ad esempio l’equazione non lineare

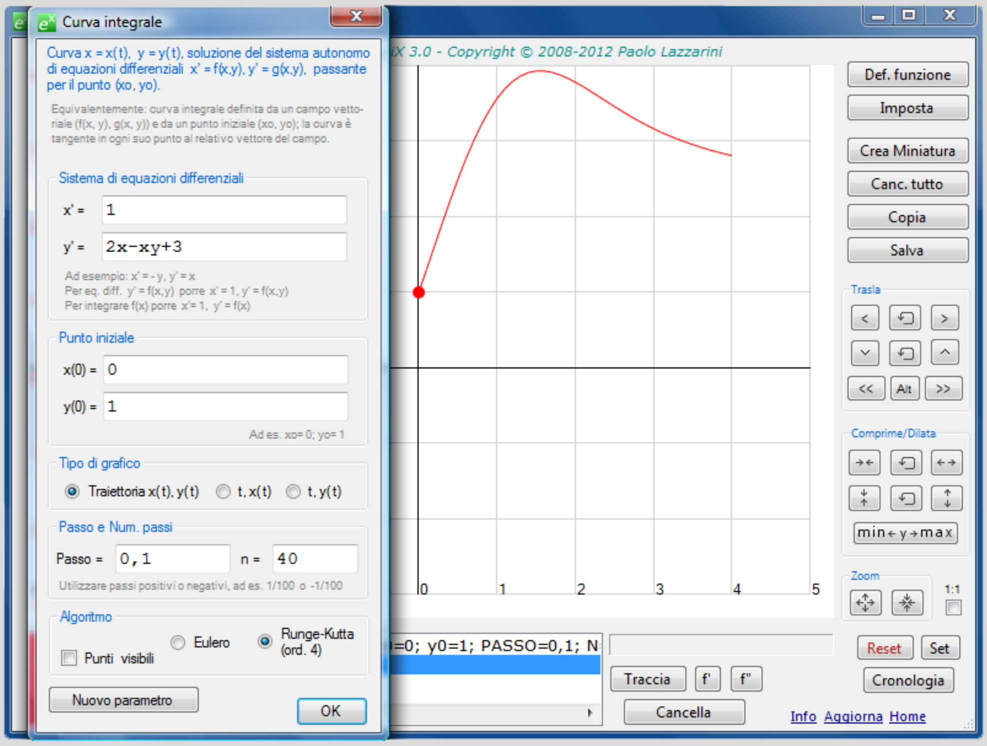
$$y' = 2x - xy + 3$$

con la condizione iniziale y(0)=1 e cerchiamo una soluzione nell’intervallo [-4, 4]. Il sistema equivalente è:

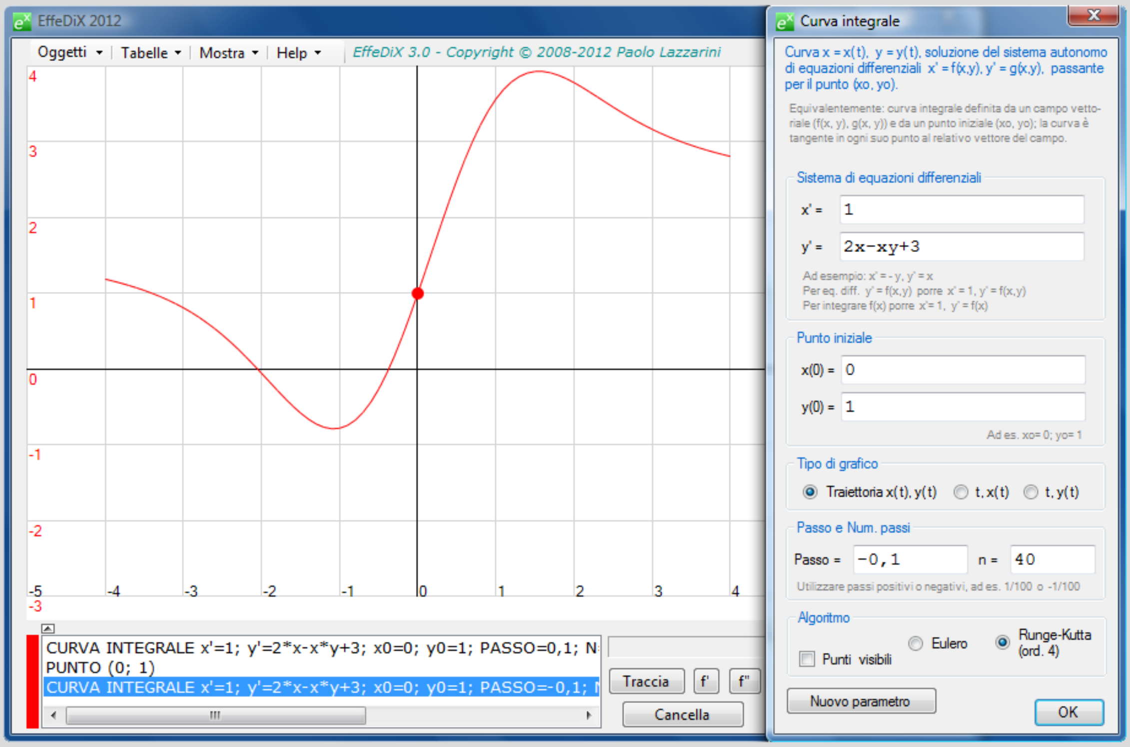
$$x' = 1$$
$$y' = 2x - xy + 3$$

con le condizioni iniziali x(0)=0, y(0)=1.

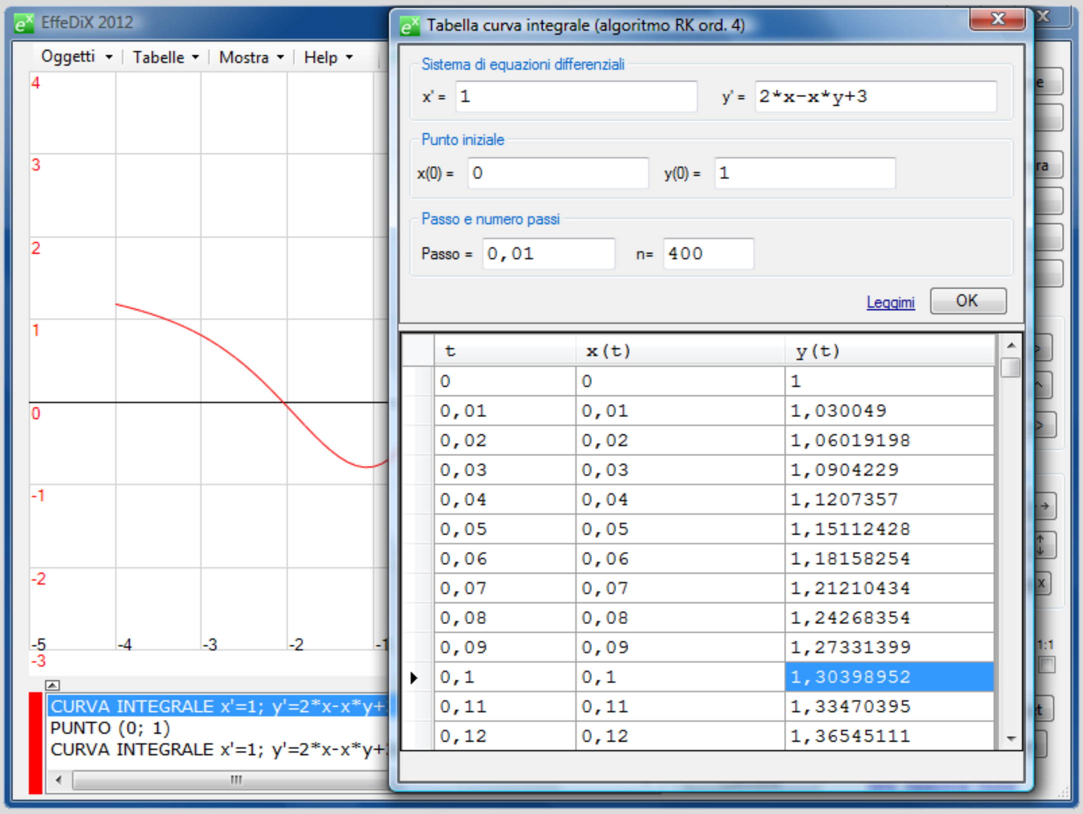
Cominceremo a tracciare la soluzione con passo positivo, ad esempio con passo 0,1; imposteremo allora 40 passi in modo che x, il cui valore iniziale è x_0=0, vari tra 0 e 4. Vedete le impostazioni e il grafico della soluzione nella schermata a fianco.



Tracciamo poi la soluzione con passo negativo uguale a -0,1 (40 passi). Nella schermata seguente vedete il grafico della soluzione nell’intervallo [-4, 4].



Per ottenere valori numerici accurati della soluzione potremo generare una tabella mediante l’opzione *Tabella curva integrale* e terremo presente le colonne relative ad x e y.



Ad esempio il valore della soluzione y(x) per x=0,1 è 1,30398952.

Osserviamo infine che nel caso della nostra equazione differenziale non siamo in grado di determinare una soluzione in termini di funzioni elementari.

Esempio Determinare graficamente la primitiva F(x) della funzione

$$f(x) = x sin x$$

tale che F(0)=0.

Una volta determinata una primitiva F(x) conosciamo **tutte** le primitive che saranno del tipo F(x) + c dove c è una costante (quindi si tratta di traslazioni di F(x) nella direzione dell’asse delle y); in sostanza una volta determinata una primitiva abbiamo determinato anche l’**integrale indefinito**

$$\int f(x)dx$$

che rappresenta l’insieme di tutte le primitive. Il problema posto equivale a risolvere l’equazione differenziale del primo ordine

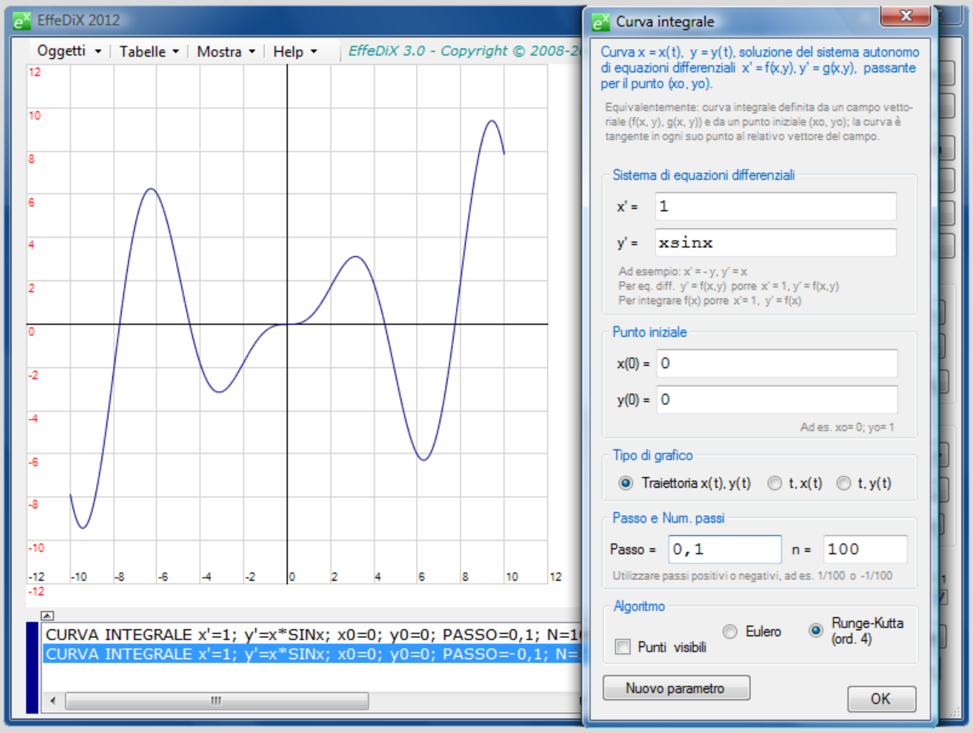
$$y'(x) = x \sin x$$

con la condizione iniziale y(0)=0 (qui abbiamo indicato F(x) con y(x)).

Si procede come nell'esempio precedente. Utilizziamo l'opzione *Curva integrale*, riconducendo l'equazione differenziale al sistema

$$x' = 1$$
$$y' = x\sin x$$

con le condizioni iniziali x(0)=0, y(0)=0. Nella schermata seguente vedete il grafico della primitiva cercata con x che varia tra -10 e 10. Il grafico è stato tracciato in due fasi: curva con passo positivo, curva con passo negativo. Nella schermata vedete la finestra di impostazione con passo positivo.



Equazioni differenziali autonome del secondo ordine

Con EffeDiX potremo tracciare le soluzioni di un'equazione differenziale autonoma del secondo ordine. Consideriamo ad esempio l'equazione

(*) $x'' = 2x' + x + 1$

con le condizioni iniziali x(0)=1, x'(0)=2. Qui la funzione incognita è la funzione x(t). La stessa equazione può essere scritta così

(**) $y'' = 2y' + y + 1$

dove la funzione incognita è y(x) e le condizioni iniziali y(0)=1, y'(0)=2. Quando operiamo con EffeDiX converrà porre l'equazione nella forma (*).

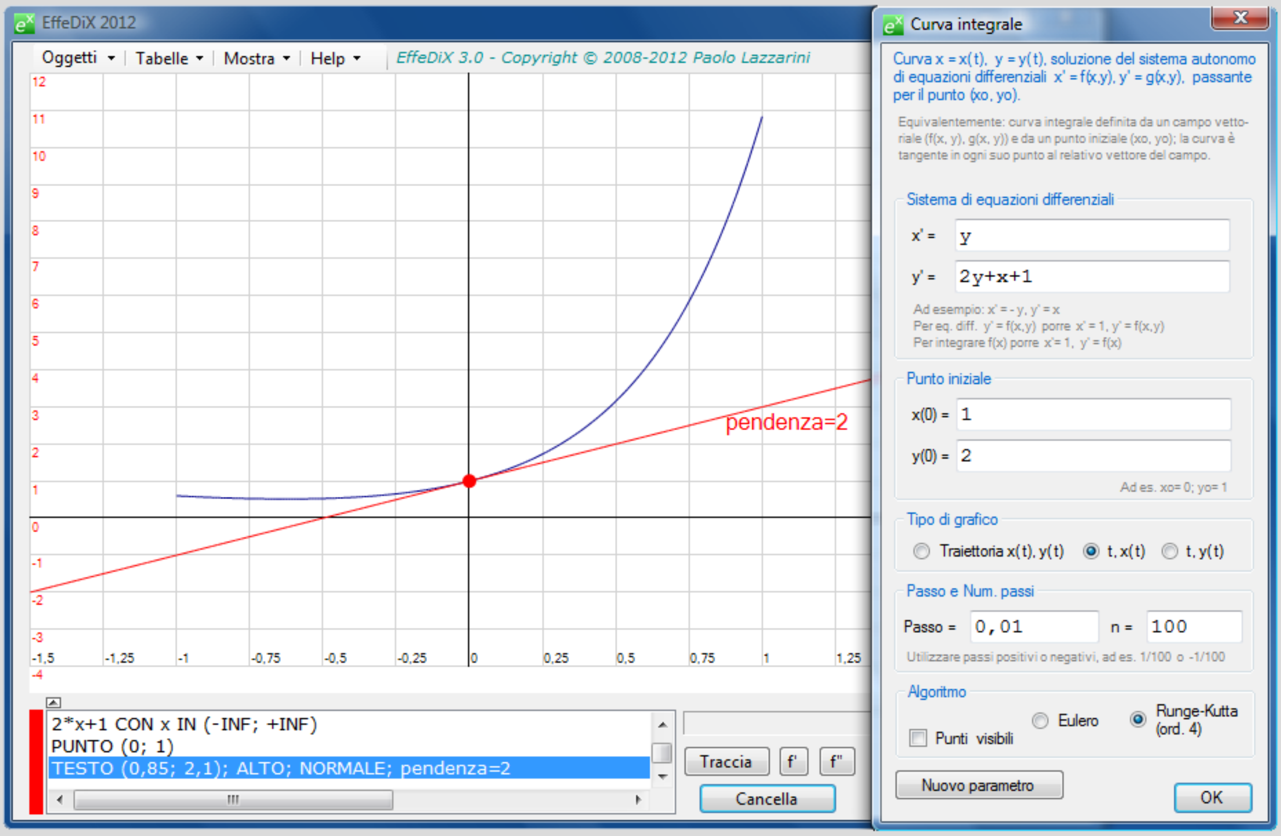
Riferendoci alla (*) procederemo così. Poniamo

$$y(t) = x'(t)$$

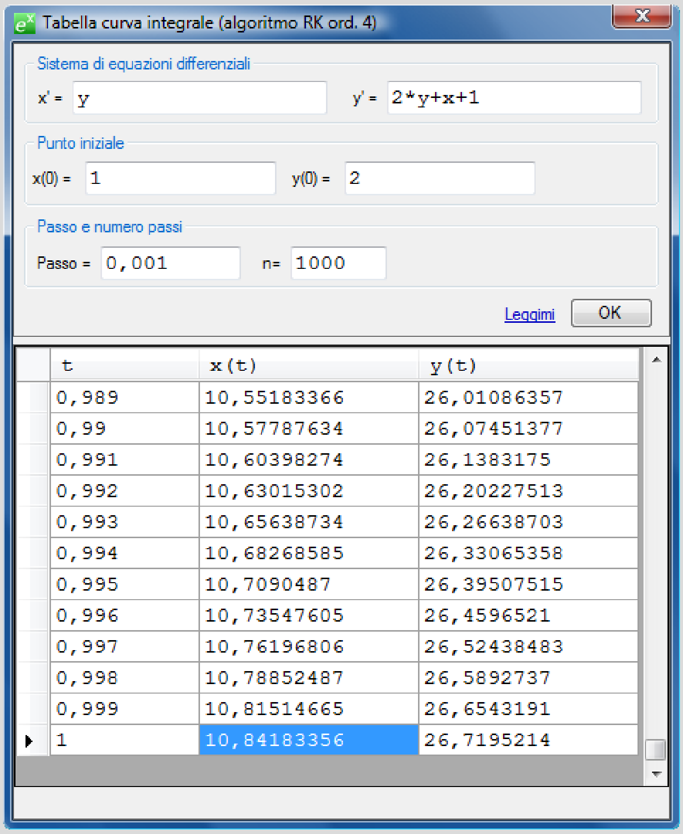
ottenendo il sistema

$$x' = y$$
$$y' = 2y + x + 1$$

con le condizioni iniziali x(0)=1, y(0)=2. Ora procederemo come al solito, facendo però attenzione a selezionare, nella finestra di impostazione, il *Tipo di grafico t, x(t)*. Nella schermata seguente vedete il grafico della soluzione x(t) con t compreso tra -1 e 1. Il grafico viene tracciato in due tempi: prima con passo positivo pari a 0,01 (100 passi), poi con passo negativo pari a −0,01 (100 passi). Notate che la curva soluzione verifica le condizioni iniziali: x(0)=1 e la pendenza in 0 è 2.



La schermata a fianco mostra la tabella relativa alla nostra equazione (opzione *Tabella curva integrale*). Qui, per avere valori più accurati, è impostato un passo pari a 0,001 (1000 passi). Ad esempio si ha x(1) = 10,84183356.



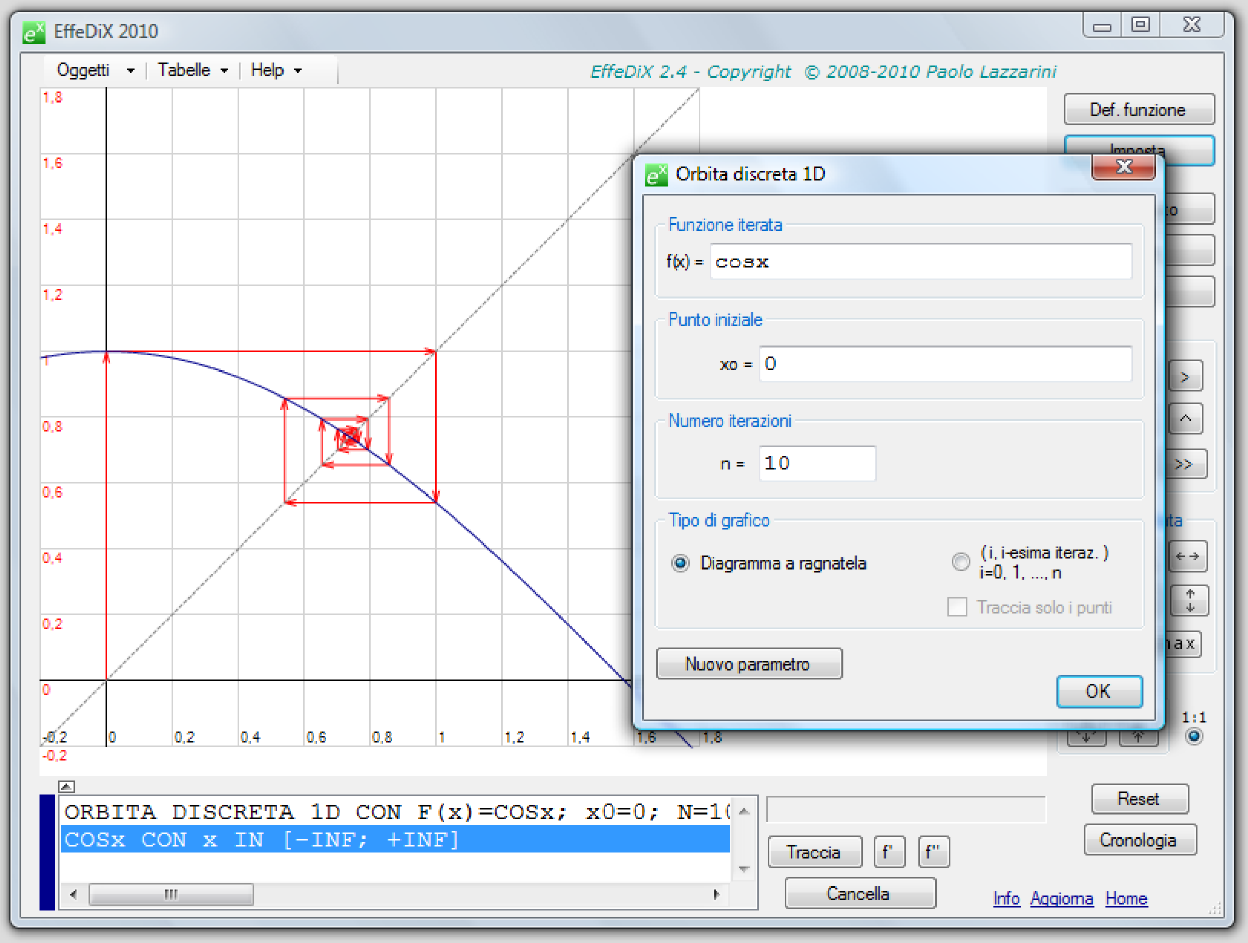
t	x(t)	y(t)
0,989	10,55183366	26,01086357
0,99	10,57787634	26,07451377
0,991	10,60398274	26,1383175
0,992	10,63015302	26,20227513
0,993	10,65638734	26,26638703
0,994	10,68268585	26,33065358
0,995	10,7090487	26,39507515
0,996	10,73547605	26,4596521
0,997	10,76196806	26,52438483
0,998	10,78852487	26,5892737
0,999	10,81514665	26,6543191
1	10,84183356	26,7195214

Sistemi dinamici discreti

EffeDiX fornisce una serie di strumenti grafici per studiare sistemi dinamici discreti sia a dimensione uno sia a dimensione due.

Orbita discreta 1D

Facendo clic sull'opzione *Orbita discreta 1D* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura seguente: qui, ad esempio, la funzione iterata è f(x) = cos(x), il punto iniziale $x_0=0$ e il numero di iterazioni n=10. Si è scelto inoltre, come tipo di grafico, un **diagramma a ragnatela** (cobweb diagram). Questa opzione traccia automaticamente la bisettrice del primo e terzo quadrante (tratteggiata). Notate che è anche stato tracciato il grafico della funzione cos(x) (utilizzando l'opzione *Grafico di funzione y=f(x)*).



Tenete presente che i punti dell'orbita sono

x_0
$x_1= f(x_0)$
$x_2= f(x_1) = f(f(x_0))$
$x_3= f(x_2) = f(f(f(x_0)))$
…

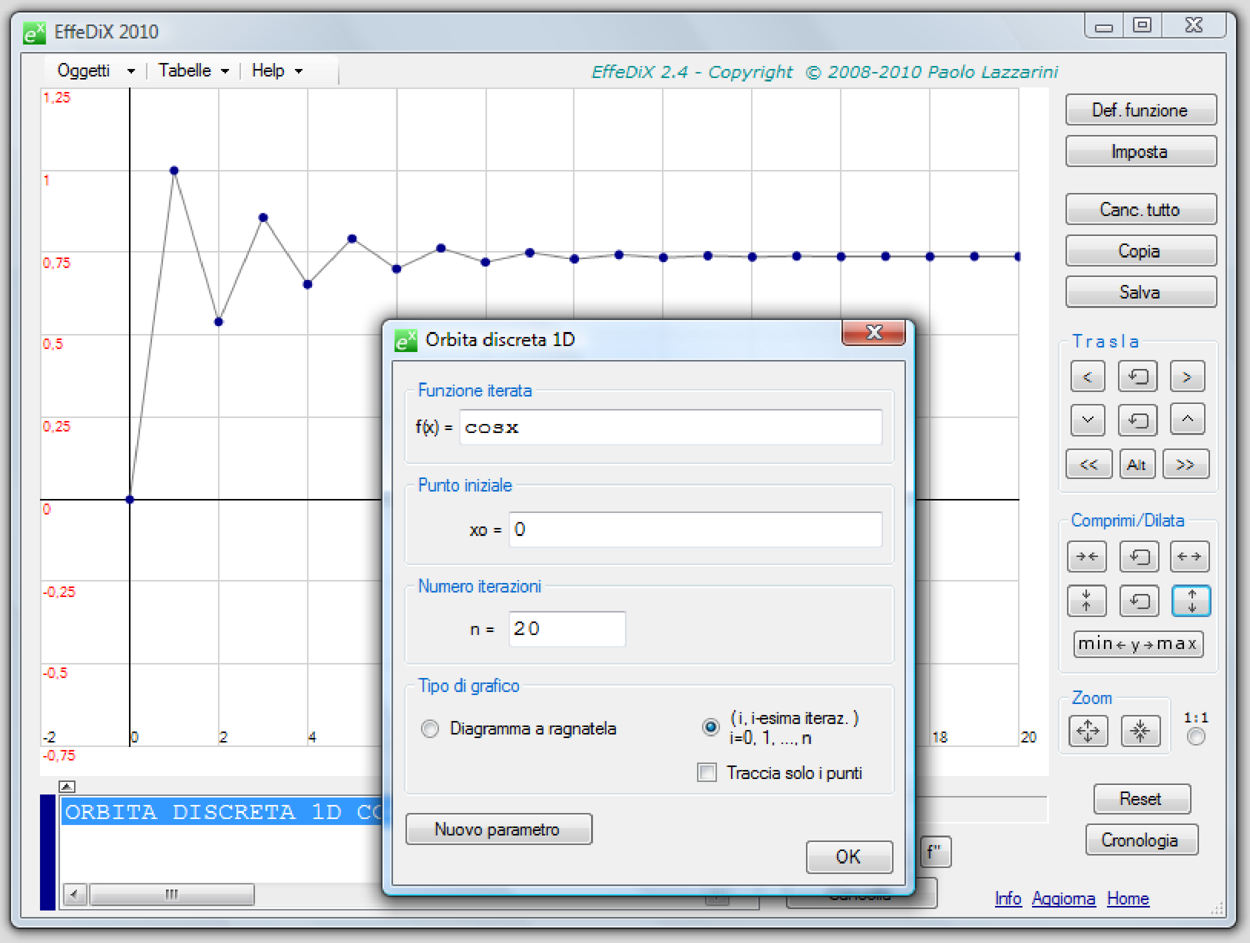
$x_n = f(x_{n-1}) = f(f(\ldots f(x_0)))$

E le frecce del diagramma a ragnatela collegano, nell'ordine, i punti

$(x_0, 0)$	punto iniziale sull'asse delle x
(x_0, x_1)	sul grafico di f(x)
(x_1, x_1)	sulla bisettrice y=x
(x_1, x_2)	di nuovo sul grafico di f(x)
(x_2, x_2)	di nuovo sulla bisettrice y=x

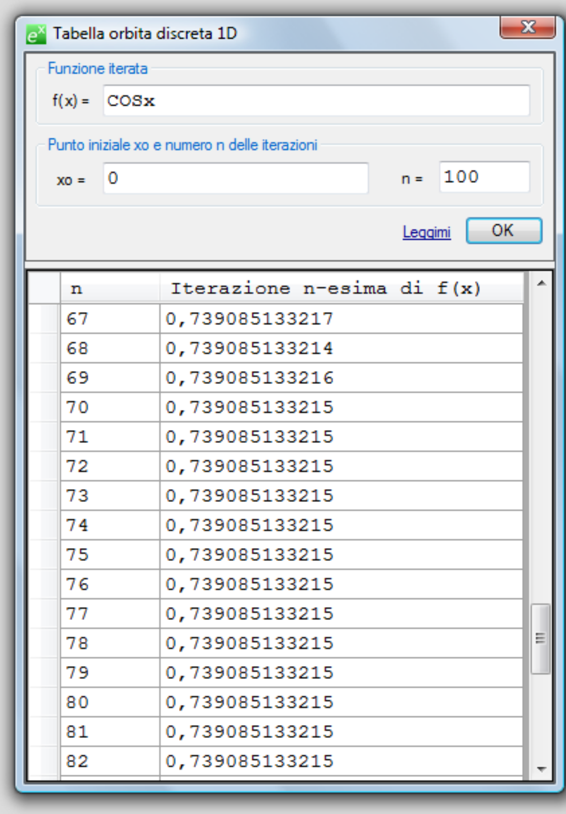
e così via. Possiamo pensare che l'orbita sia rappresentata **sulla bisettrice y=x** anziché sull'asse delle x; i punti dell'orbita così rappresentata sono dunque (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3) e così via.

La figura seguente mostra invece l'altra scelta possibile per quanto concerne il tipo di grafico: qui si ottiene il grafico che mostra il valore i-esimo x_i dell'orbita in funzione di *i* (cioè l'i-esima iterazione in funzione di *i*).



Sia il primo che il secondo grafico mostrano la rapida convergenza dell'orbita al valore $x^* \approx 0{,}74$.

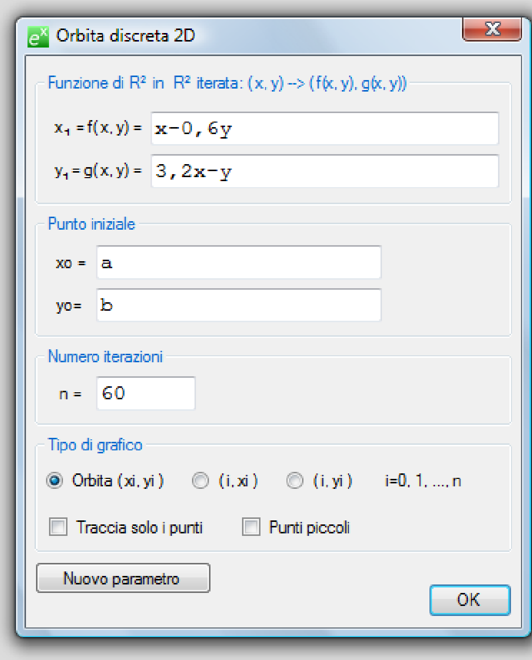
La tabella della figura seguente, generata mediante l'opzione *Tabelle – Tabella orbita discreta 1D*, mostra che $x^* \approx 0{,}739085133215$.



E' interessante verificare che l'orbita tende a x^* qualunque sia il punto iniziale x_0 (x^* è in questo caso un **attrattore globale**). A questo scopo basta parametrizzare x_0 e generare un'animazione [860 Kb, richiede connessione].

Orbita discreta 2D

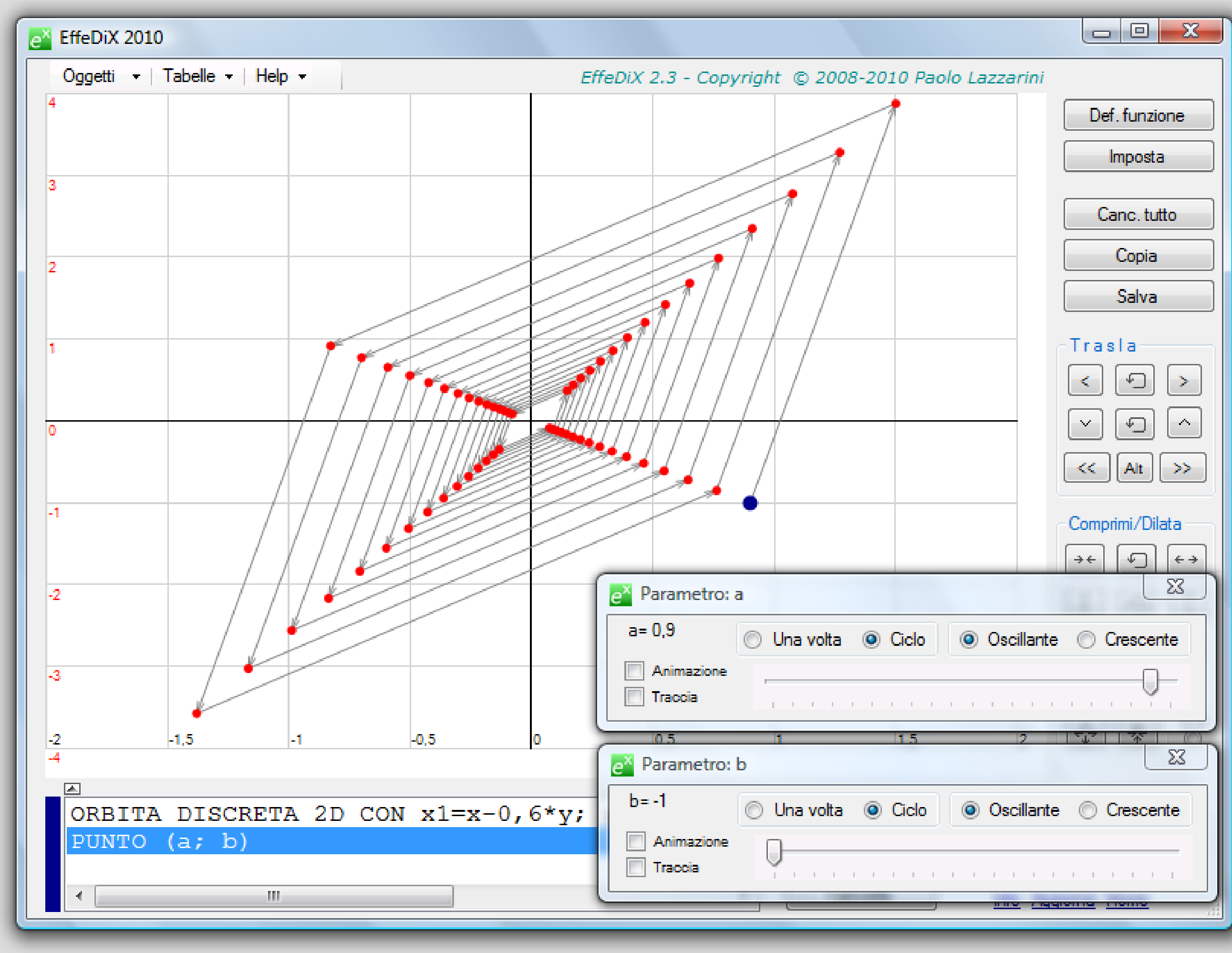
Facendo clic sull'opzione *Orbita discreta 2D* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura a fianco: qui, ad esempio, la funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che viene iterata manda il punto (x; y) nel punto (x-0,6y; 3,2x-y), il punto iniziale è il punto (a; b), dunque le coordinate del punto sono parametriche, e il numero di iterazioni è 60. Si è scelto inoltre, come tipo di grafico, l'**orbita** del punto. Tenete presente che l'orbita è costituita dai punti



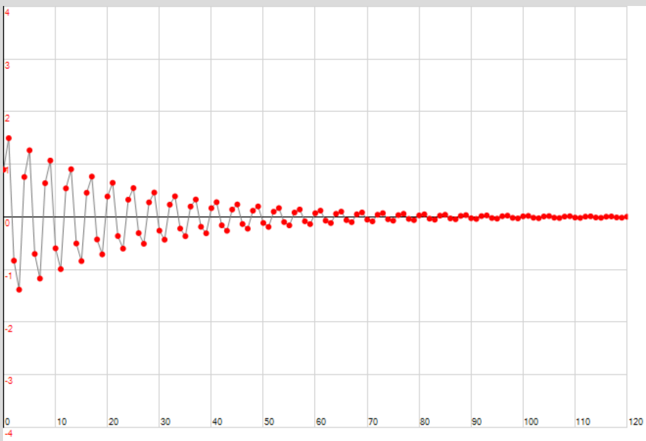
x_0,	y_0
$x_1 = f(x_0, y_0)$,	$y_1 = g(x_0, y_0)$
$x_2 = f(x_1, y_1)$,	$y_2 = g(x_1, y_1)$
$x_3 = f(x_2, y_2)$,	$y_3 = g(x_2, y_2)$
…	…
$x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1})$,	$y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1})$

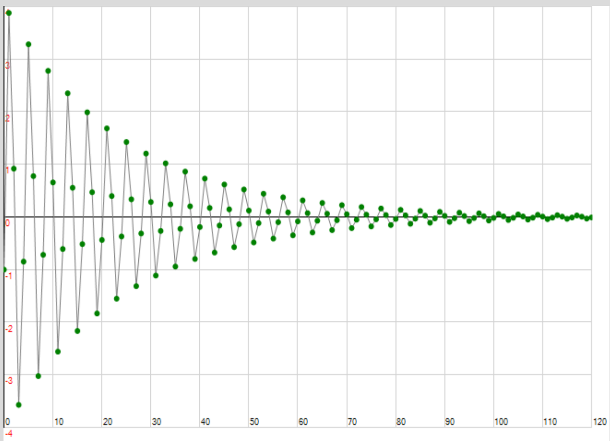
(nel nostro caso f(x, y) = x-0,6y e g(x, y) = 3,2x-y).

Nella figura seguente vedete l'orbita relativa al punto iniziale (0,9; -1) (punto blu in figura, pilotabile mediante le due slider bar). Come si vede l'orbita converge, seppur lentamente, verso l'origine.



Le due figure seguenti mostrano rispettivamente i grafici dell'ascissa x_i in funzione di i e dell'ordinata y_i in funzione di i dei punti (x_i, y_i) dell'orbita.





Per ottenere questi grafici utilizzeremo la stessa finestra di impostazione e selezioneremo il *Tipo di grafico* opportuno (mediante i pulsanti radio) cioè faremo clic sul pulsante *(i, x_i)* per il primo grafico e sul pulsante *(i, y_i)* per il secondo. Qui, inoltre, si è impostato n=120 anziché n=60.

Nel nostro caso la funzione F di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ che viene iterata è **lineare** e manda il punto

$$X = \binom{x}{y}$$

nel punto AX dove A è la matrice

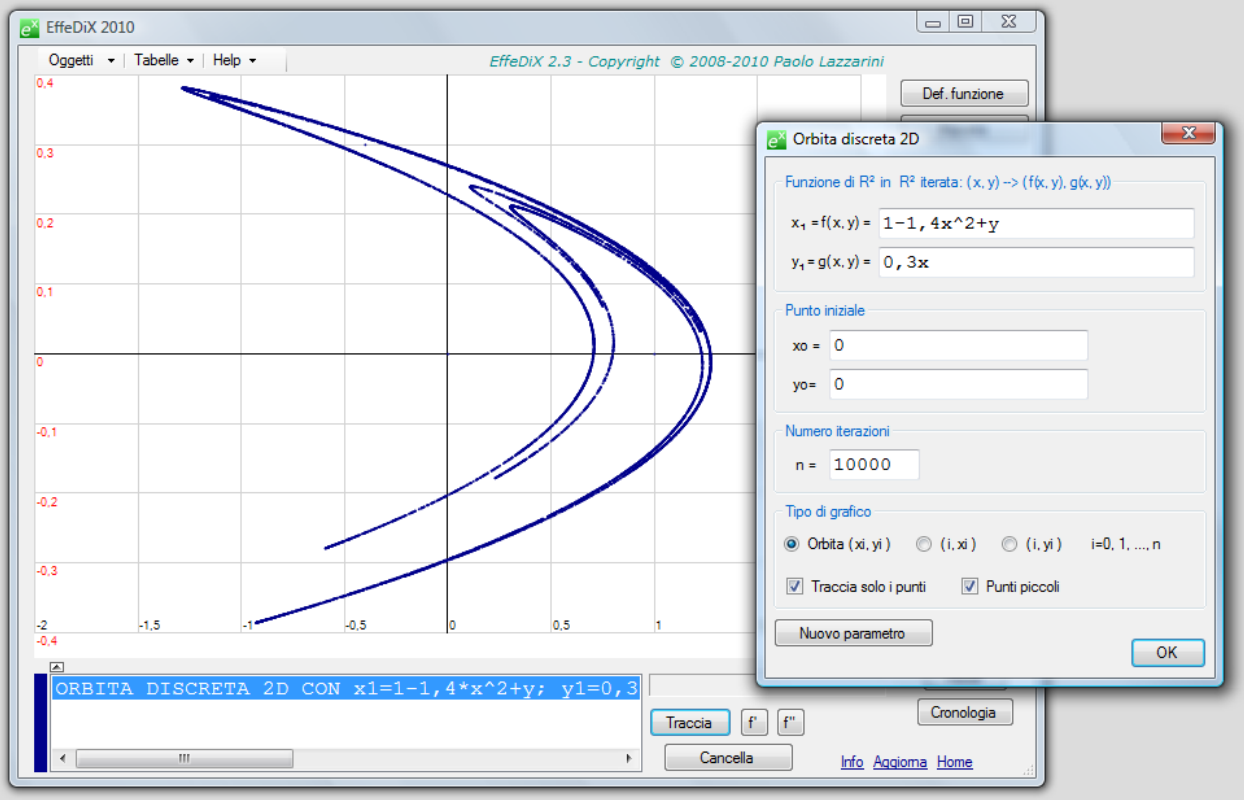
$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}6 \\ 3{,}2 & -1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{23}\, i}{5} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -\frac{\sqrt{23}\, i}{5}$$

sono distinti e hanno modulo minore di 1: $|\lambda_1| = |\lambda_2| \approx 0{,}959$. Ne segue che l'origine, unico punto fisso di F, è un punto **attrattore** (globale). Qualunque sia il punto iniziale l'orbita viene "attratta" verso l'origine. La lenta convergenza dell'orbita verso l'origine si spiega osservando che il modulo degli autovalori, benché minore di 1, è di poco minore di 1. Possiamo verificare graficamente questa caratteristica dell'origine modificando le coordinate del punto iniziale mediante le due slider bar: vedi l'animazione [3.6 Mb, richiede connessione].

Se i punti dell'orbita sono molti converrà tracciare punti piccoli e tra loro non connessi dalle frecce; a tale scopo metterete la spunta nelle caselle *Traccia solo i punti* e *Punti piccoli* della solita finestra di impostazione. Nella schermata seguente vedete ad esempio l'attrattore di Henon: qui i punti dell'orbita sono 10000.



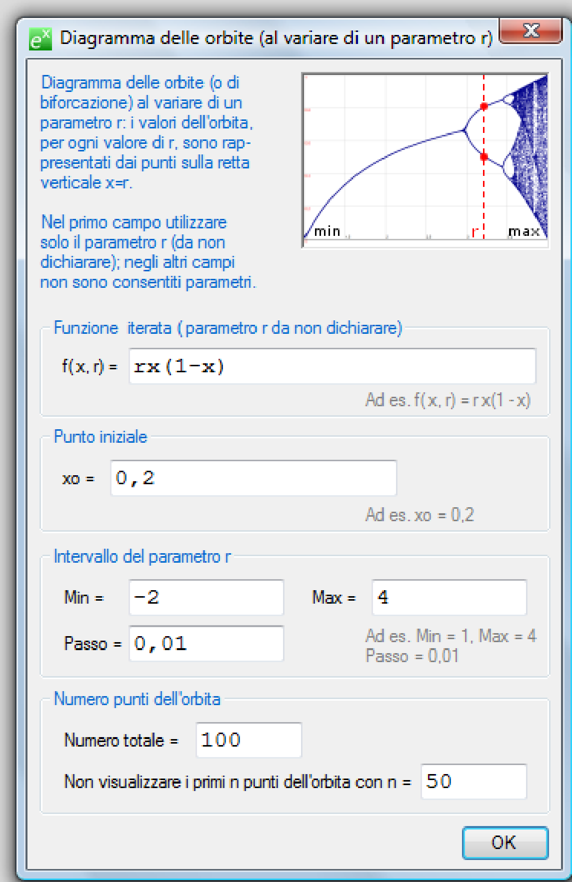
In questa animazione [2,1Mb, richiede connessione] vedete l'attrattore di Henon al variare del punto iniziale (il punto iniziale è in blu, le iterazioni sono 1000).

Diagramma delle orbite al variare di un parametro *r* (diagramma di biforcazione)

Facendo clic sull'opzione *Diagramma delle orbite (al variare di un parametro r)* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura a fianco: qui, ad esempio, la funzione iterata è la funzione logistica

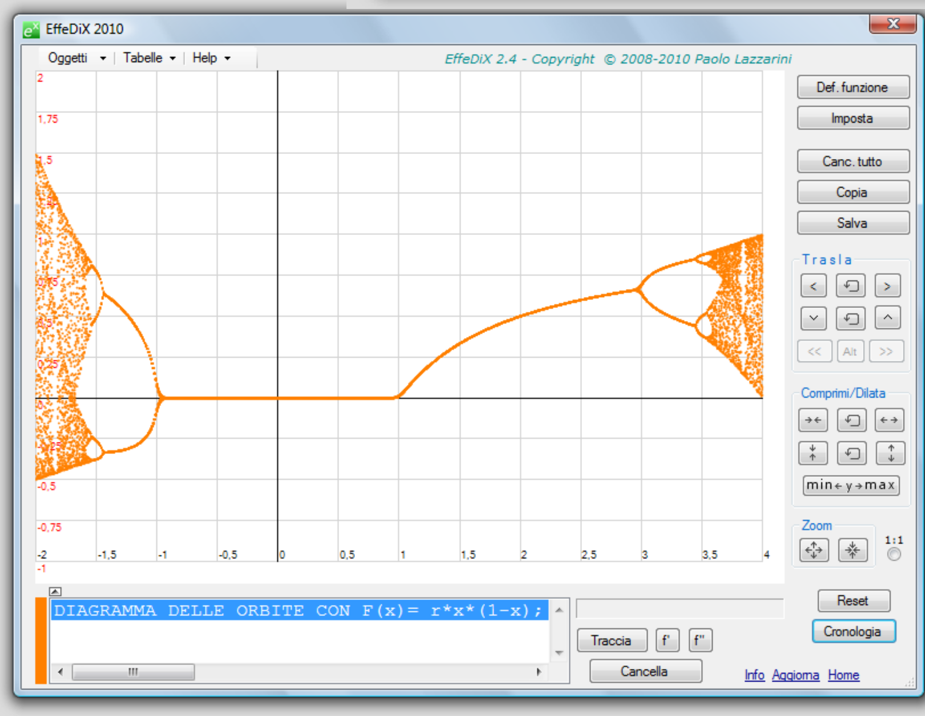
f(x, r) = rx(1-x)

in cui compare il parametro *r*. Il punto iniziale è x_0 = 0,2 e il parametro *r* varia tra -2 e 4 con passo 0,01. Per ogni valore del parametro *r*, il diagramma delle orbite visualizza sulla retta x=r i valori asintotici dell'orbita di x_0. Dovremo fornire il numero delle iterazioni, cioè dei punti dell'orbita (nel nostro caso 100) e il numero dei punti non visualizzati (nel nostro caso 50, cioè i primi 50 punti dell'orbita non saranno visualizzati in modo da capire quale sia l'andamento asintotico).

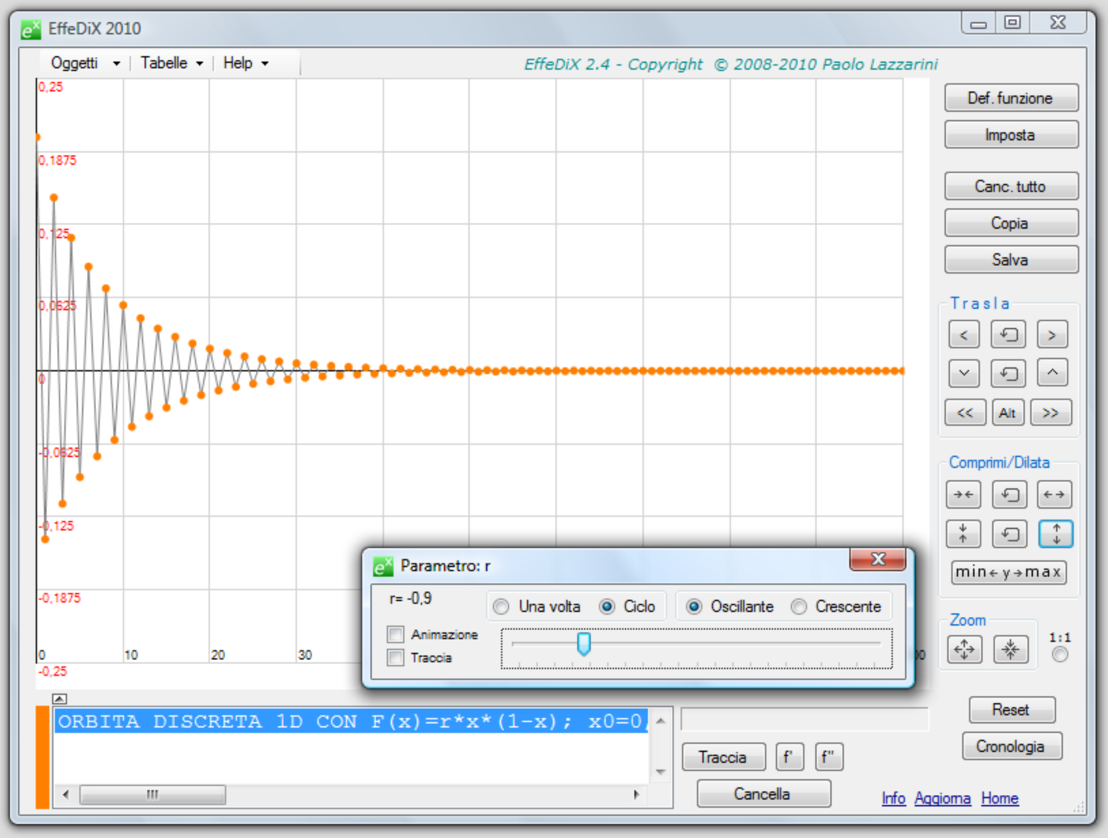


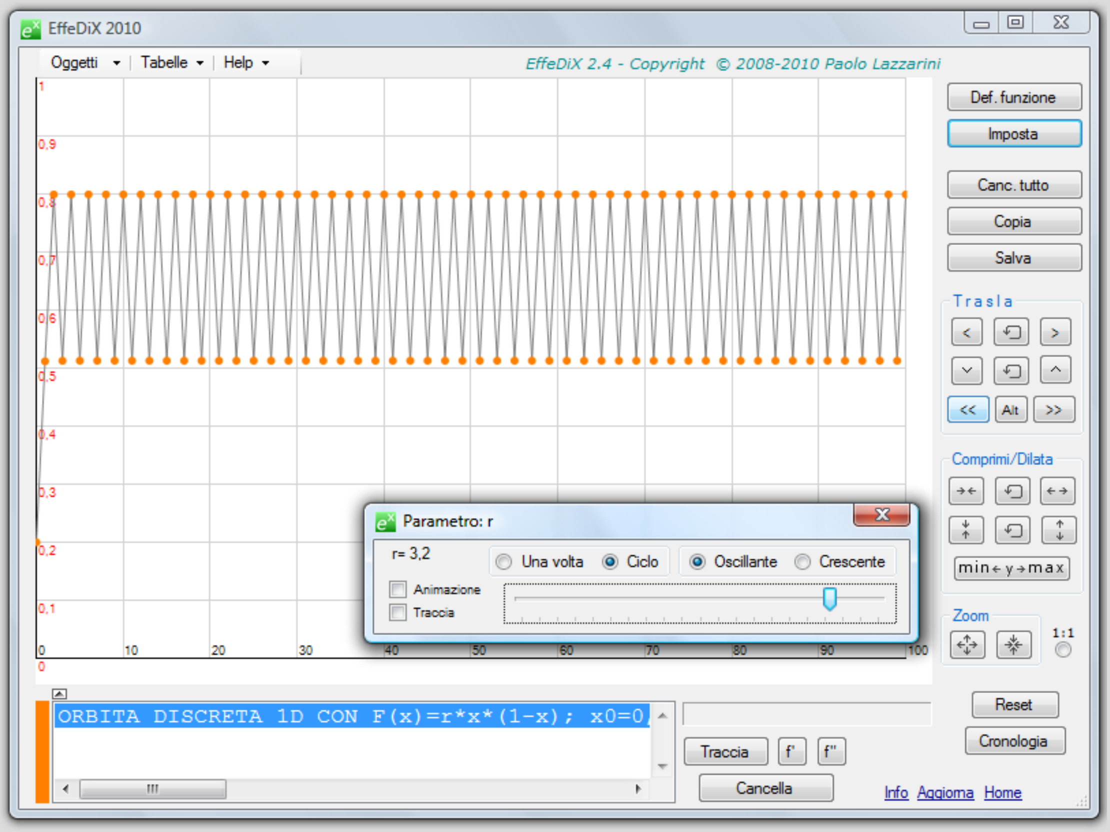
Tenete presente che nel primo campo dovrete utilizzare necessariamente il parametro r (e non sono consentiti altri parametri) mentre negli altri campi non sono consentiti parametri.

Nella figura seguente vedete il diagramma ottenuto. Osservate ad esempio che per valori di *r* compresi tra -1 e 1 il valore asintotico dell'orbita è 0 mentre per *r* compreso tra poco più di 3 e circa 3,4 l'orbita oscilla tra due valori, ad esempio per r=3,2 l'orbita (asintotica) oscilla approssimativamente tra i valori 0,5 e 0,8 (ciclo di periodo 2).



Possiamo avere conferma di ciò utilizzando l'opzione *Orbita discreta 1D* e selezionando come tipo di grafico quello dell'i-esima iterazione in funzione di *i*. Le due figure seguenti mostrano i grafici per r=-0,9 e per r=3,2.





Qui di seguito vedete alcune zoomate sul diagramma delle orbite tracciato precedentemente che ne mostrano la sua natura frattale.

Tenete presente che operando zoomate via via più profonde, se non volete perdere i dettagli, dovrete agire sui parametri *passo*, *numero totale punti dell'orbita* e *numero dei punti non visualizzati*. Ad esempio l'ultima zoomata in figura è stato ottenuta rispettivamente con questi valori: 0,00005, 400, 300.

L'elaborazione del diagramma delle orbite può richiedere **tempi lunghi** (ma può essere interrotta in qualsiasi momento digitando ESC); per questo motivo quando tra gli oggetti da tracciare (nel box degli oggetti grafici) è presente un diagramma delle orbite vengono automaticamente disabilitate alcune funzionalità del programma (ad esempio non potrete eseguire lo scorrimento continuo del grafico o ridimensionare la finestra principale). Quando ritracciate un diagramma delle orbite dopo aver modificato qualche dato è consigliabile cancellare dal box degli oggetti grafici la versione precedente in modo da ridurre i tempi di elaborazione.

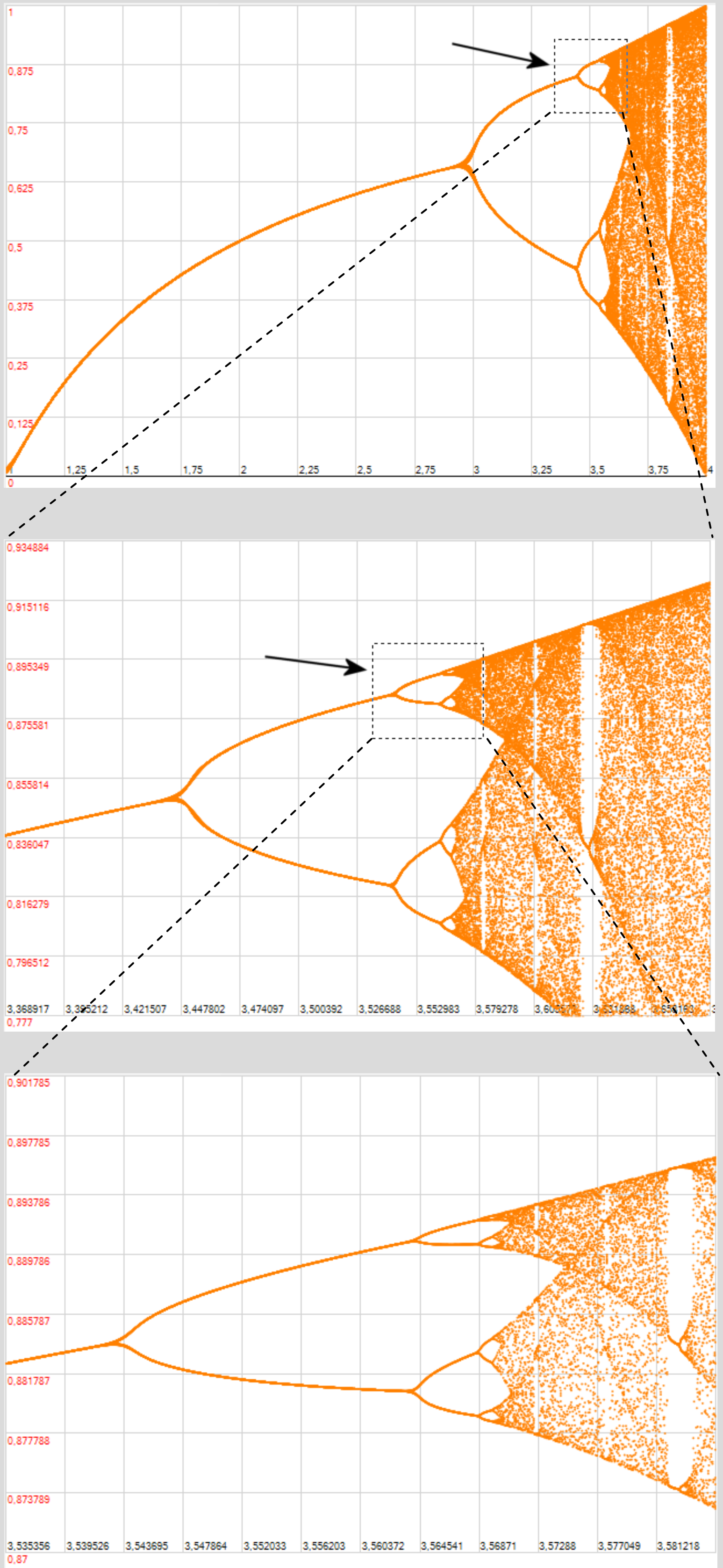


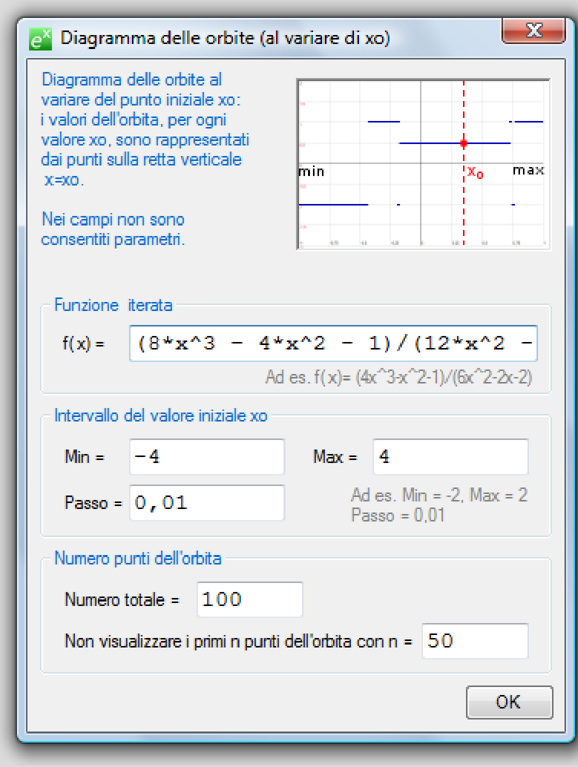
Diagramma delle orbite al variare del punto iniziale x_0

Facendo clic sull'opzione *Diagramma delle orbite (al variare del punto iniziale)* si apre la finestra di impostazione che vedete nella figura a fianco: qui, ad esempio, la funzione iterata è

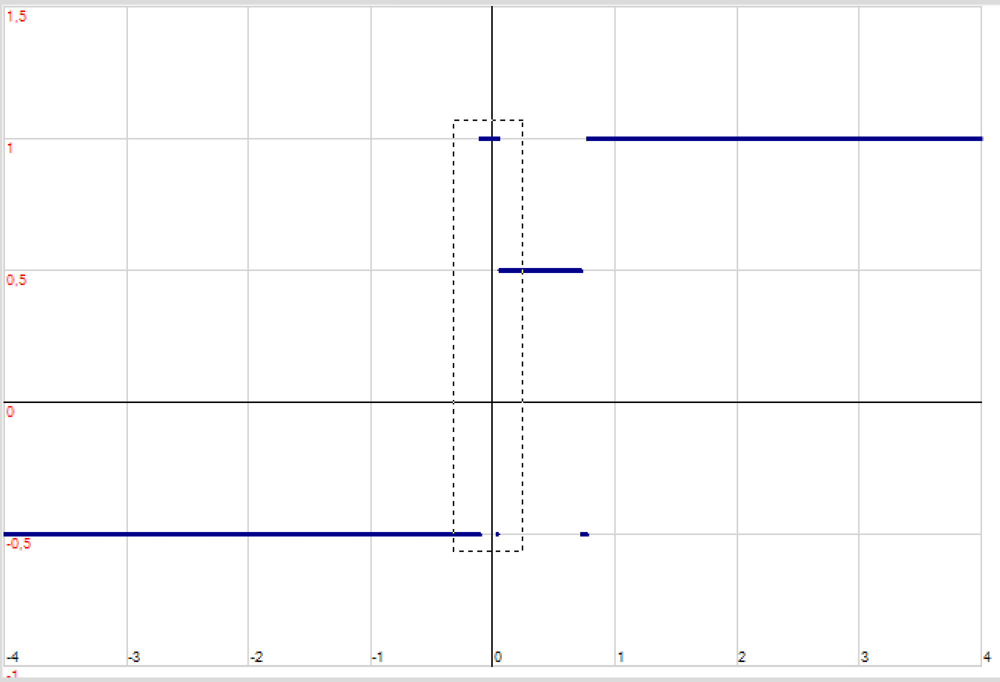
$$f(x) = \frac{8x^3 - 4x^2 - 1}{12x^2 - 8x - 1}$$

e il punto iniziale x_0 **varia** tra -4 e 4 con passo 0,01. Per ogni valore di x_0, il diagramma delle orbite visualizza sulla retta $x=x_0$ i valori asintotici dell'orbita di x_0. Dovremo fornire il numero delle iterazioni, cioè dei punti dell'orbita (nel nostro caso 100) e il numero dei punti non visualizzati (nel nostro caso 50, cioè i primi 50 punti dell'orbita non saranno visualizzati in modo da capire quale sia l'andamento asintotico).

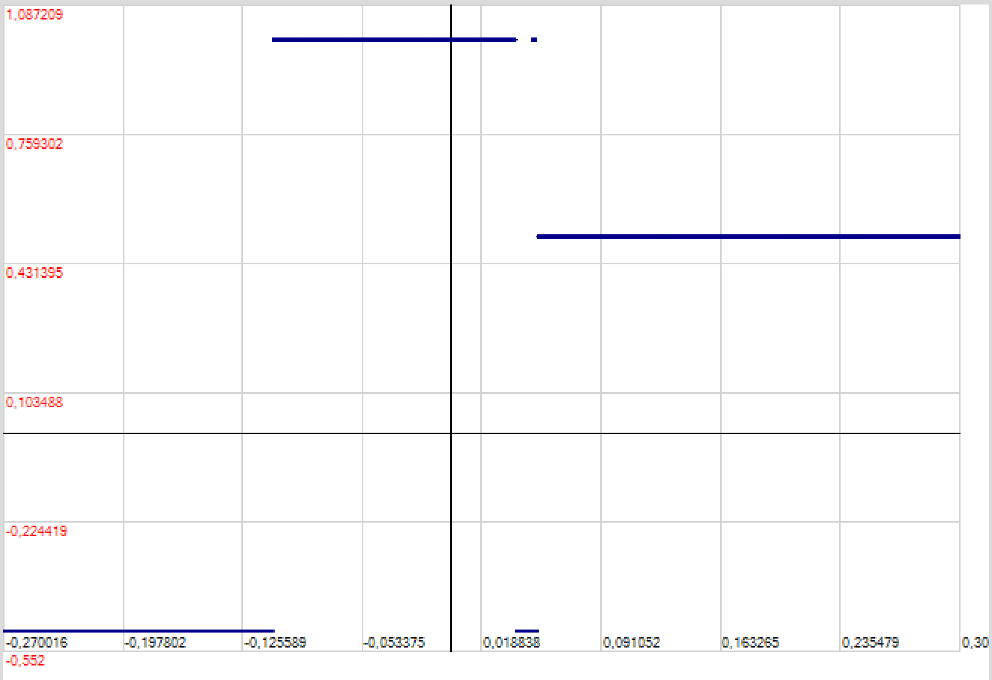
Tenete presente che nei vari campi non sono consentiti parametri.



Nella figura seguente vedete il diagramma ottenuto.



Come si vede le orbite convergono al valore $x^*=-0,5$ oppure al valore $x^{**}=0,5$ oppure al valore $x^{***}=1$. Nella regione evidenziata (tratteggiata) in figura troviamo valori di x_0 che determinano orbite convergenti a ciascuno dei tre valori x^*, x^{**}, x^{***}. Se Indichiamo con I_{x^*} l'insieme dei valori iniziali x_0 che determinano un orbita convergente a x^* (e analogamente saranno definiti gli insiemi $I_{x^{**}}$ e $I_{x^{***}}$), ci rendiamo conto che la "struttura" di tali insiemi è estremamente "intricata" e ricorda l'insieme frattale di Cantor. Ce ne rendiamo conto osservando la schermata seguente che rappresenta l'ingrandimento della regione evidenziata (tratteggiata): il segmento superiore che nella schermata precedente appariva connesso in realtà non lo è (e così via procedendo con zoomate successive).



Per inciso, se applichiamo l'algoritmo di Newton per approssimare le radici dell'equazione

$$g(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

(le radici sono $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$) dobbiamo iterare proprio la funzione

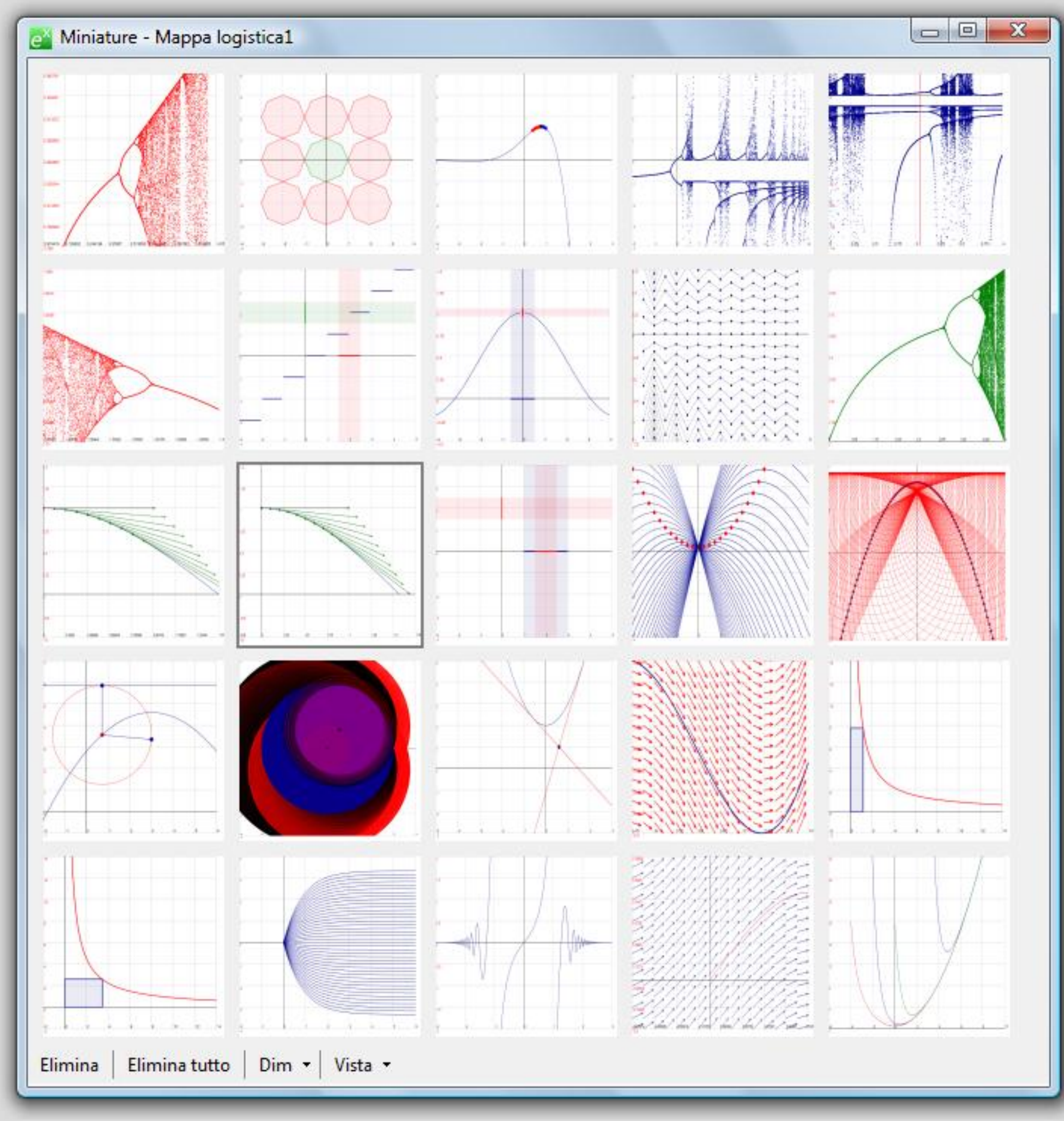
$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{8x^3 - 4x^2 - 1}{12x^2 - 8x - 1}$$

di cui abbiamo visualizzato il diagramma delle orbite nelle schermate precedenti.

L'elaborazione del diagramma delle orbite può richiedere **tempi lunghi** (ma può essere interrotta in qualsiasi momento digitando ESC); per questo motivo quando tra gli oggetti da tracciare (nel box degli oggetti grafici) è presente un diagramma delle orbite vengono automaticamente disabilitate alcune funzionalità del programma (ad esempio non potrete eseguire lo scorrimento continuo del grafico o ridimensionare la finestra principale). Quando ritracciate un diagramma delle orbite dopo aver modificato qualche dato è consigliabile cancellare dal box degli oggetti grafici la versione precedente in modo da ridurre i tempi di elaborazione.

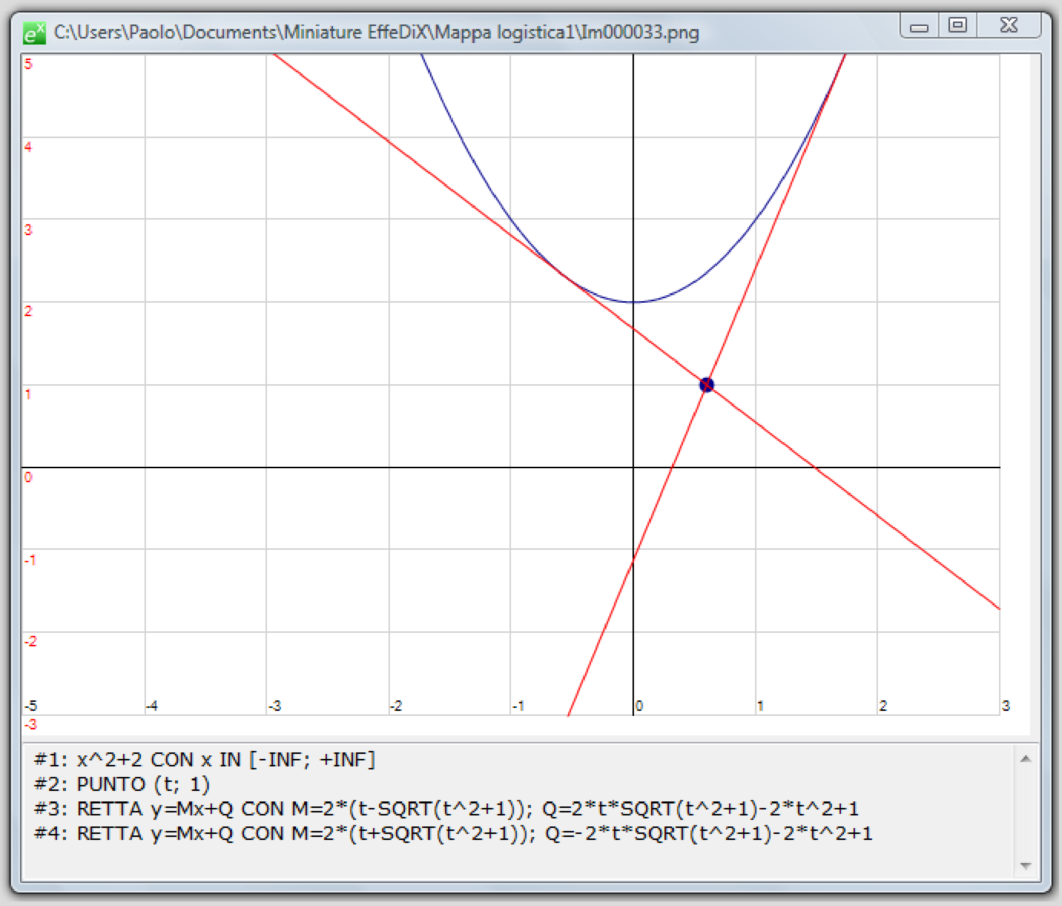
Miniature

Lavorando con EffeDiX può far comodo salvare in un sol colpo la schermata corrente insieme a tutti i comandi utilizzati per generarla. Per far questo basta un semplice clic sul pulsante *Crea Miniatura* della finestra principale. EffeDiX crea automaticamente un'immagine in formato PNG, una miniatura dell'immagine e un file di testo in cui sono memorizzati tutti i comandi; EffeDiX, inoltre, apre la finestra corrente delle miniature (vedi ad esempio la figura seguente).



Facendo doppio clic su una miniatura potrete aprire l'immagine salvata e leggere i comandi come vedete nella figura seguente (che si riferisce alla 18-esima miniatura). Una volta aperta la finestra delle immagini, per visualizzare l'immagine precedente o successiva basta un clic sull'immagine corrente rispettivamente col pulsante destro o sinistro del mouse.

Per aprire in qualsiasi momento la finestra delle miniature utilizzate l'opzione *Apri Miniature* del menu *File*.

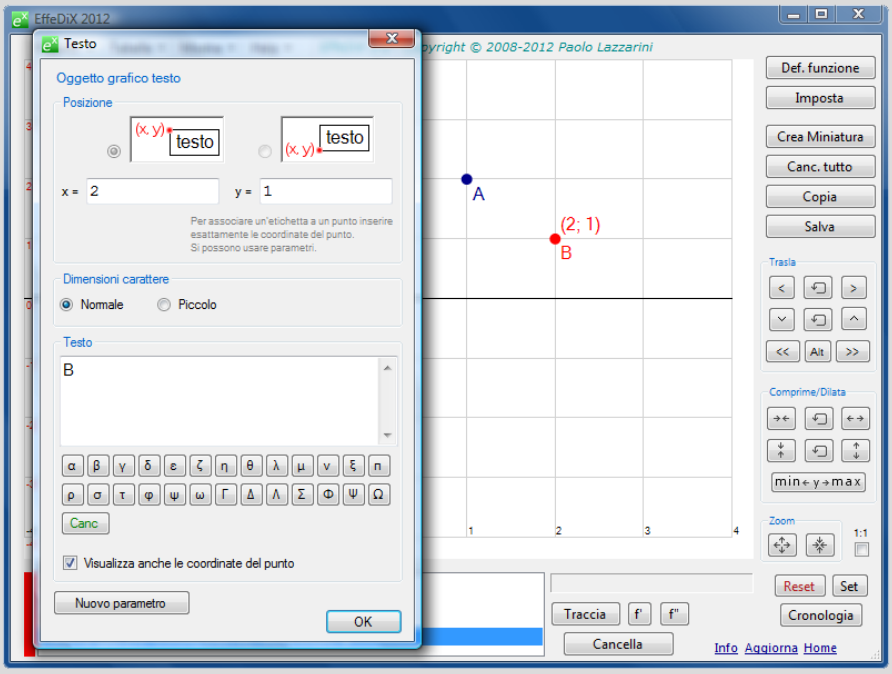


Per gestire e creare nuove cartelle di miniature fate riferimento alla scheda di impostazione delle miniature.

Espressioni e testo

Testo

EffeDiX tratta un oggetto **testo** come un oggetto grafico che può essere disposto in un qualsiasi punto del piano (le coordinate della posizione possono dipendere da un parametro). Qui a fianco vedete la finestra di impostazione che potete aprire facendo clic sull'opzione *Testo* oppure, più rapidamente, digitando **Alt+T**.



Nella schermata vedete ad esempio che è stato assegnato un nome a due punti del piano; inoltre nel caso del punto B sono visualizzate anche le sue coordinate (spunta sulla casella *Visualizza anche le coordinate*).

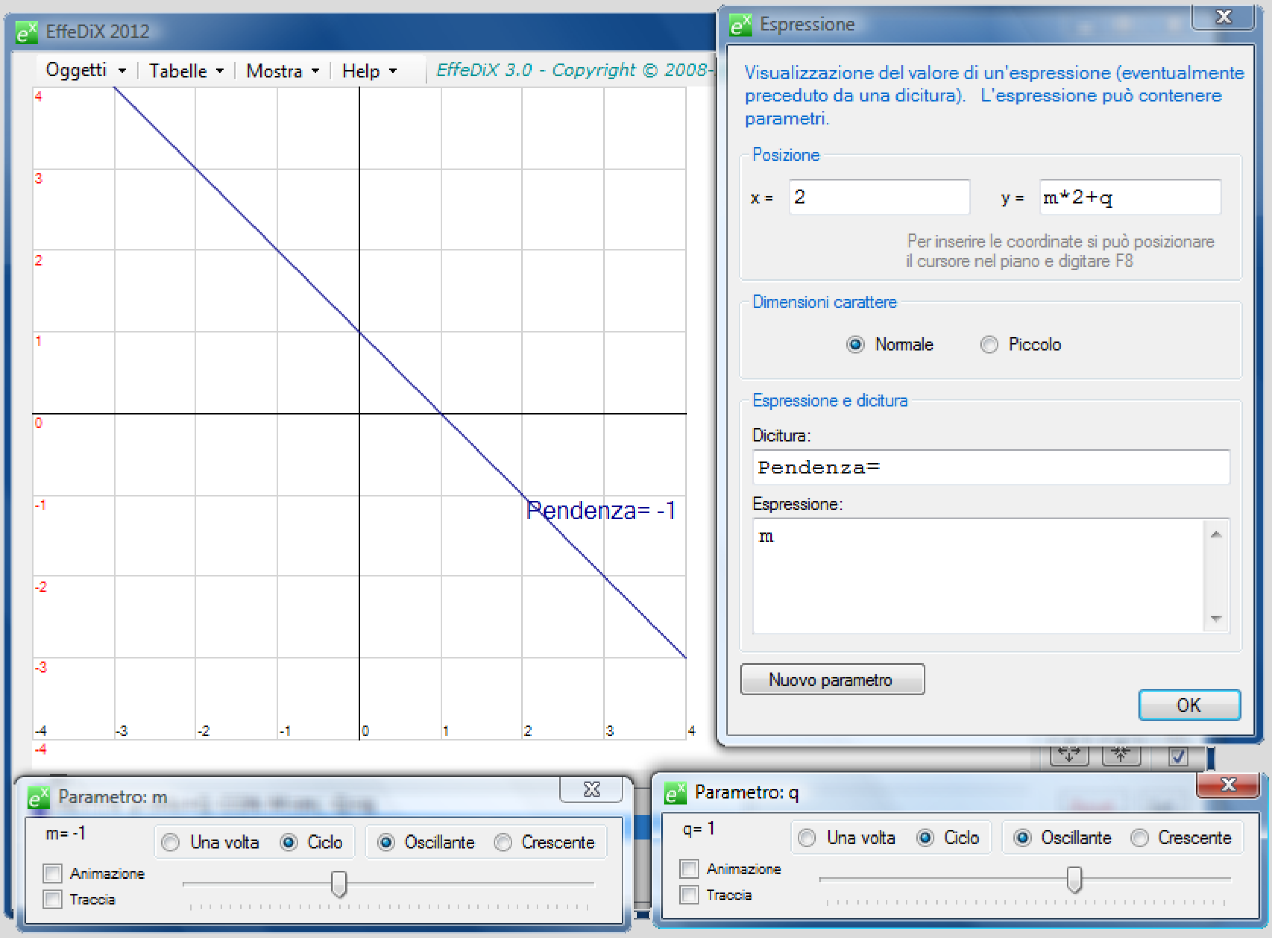
Per associare un etichetta a un punto inserire come coordinate del testo **esattamente** le coordinate del punto. Se aprite la finestra per inserire del testo (Alt+T) quando nel box degli oggetti grafici è selezionato un punto, EffeDiX vi propone automaticamente le coordinate del punto.

Per inserire le coordinate si può anche posizionare il cursore in un punto del piano e digitare F8.

Espressioni

EffeDiX vi consente di visualizzare in qualsiasi punto del piano il **valore** di un espressione eventualmente preceduto da una dicitura. Sia l'espressione da visualizzare sia le coordinate del testo possono essere parametriche.

Ad esempio potremmo visualizzare la pendenza di una retta $y=mx+q$ al variare della retta (al variare dei parametri m e q). La schermata seguente mostra come impostare l'espressione che nel nostro caso è semplicemente m (ma l'espressione può essere di qualsiasi complessità e contenere più parametri). Notate inoltre che le coordinate del testo visualizzato corrispondono ad un punto appartenente alla retta (al punto di ascissa uguale a 2); in tal modo l'etichetta rimarrà dinamicamente vicina alla retta.



Per inserire le coordinate della posizione del testo si può anche posizionare il cursore in un punto del piano e digitare F8.